Q.C.M. n°6 : Calculs d'intégrales.

Pour samedi 30 août

En physique, certaines évolutions ou transformations sont complexes, et il est trop difficile de les étudier d'un seul bloc. Pour pouvoir contourner ces difficultés, une solution consiste à décomposer ces évolutions en « petites » transformations. Cette façon de raisonner va amener à réaliser des calculs d'intégrale, qu'il convient donc de maîtriser.

Les exemples sont pris dans le cours de PTSI, il est inutile de chercher à comprendre comment ces équations ont été obtenues.

Remarque : dans cette planche d'exercices, il n'y a jamais besoin d'utiliser l'intégration par parties.

Les réponses doivent être envoyées grâce au formulaire suivant : `https://forms.gle/1taM7ykWAyCffMgw9`

1 - Calculer : $F = \displaystyle\int_0^R 4\pi r^2\, dr$.

A : $F = 4\pi\, R^3$

B : $F = \dfrac{4}{3}\pi\, R^3$

C : $F = 4\pi\, r^3$

D : $F = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$

2 - Calculer : $G = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} 3\,\sin(\omega t)\, dt$.

A : $G = \dfrac{6}{\omega}$

B : $G = \dfrac{3}{2\omega}$

C : $G = 6$

D : $G = \dfrac{3}{2}$

3 - Calculer : $H = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\cos(\theta)\, d\theta$.

A : $H = 0$

B : $H = 1$

C : $H = 2$

D : $H = \pi$

4 - Une quantité n de gaz parfait subit une transformation isotherme, c'est-à-dire que sa température reste constante, on la note T_0. Durant cette transformation, le volume du gaz passe de V_1 à V_2. Calculer le travail des forces de pression, valant :

$$W_p = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_0}{V}\, dV$$

A : $W_p = nRT_0\left(\dfrac{1}{V_2^2} - \dfrac{1}{V_1^2}\right)$

B : $W_p = -nRT_0\left(\dfrac{1}{V_2} - \dfrac{1}{V_1}\right)$

C : $W_p = -nRT_0\,\ln\left(V_2 - V_1\right)$

D : $W_p = -nRT_0\,\ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$

5 - Un parallélépipède, de longueur L et de surface S, de masse volumique ρ, peut tourner autour d'un axe vertical passant par son centre. Son moment d'inertie vaut :

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho S x^2 \, dx$$

Calculer J.

A : $J = \rho S \dfrac{L^3}{6}$

B : $J = \rho S \dfrac{L^3}{8}$

C : $J = \rho S \dfrac{L^3}{12}$

D : $J = \rho S \dfrac{L^3}{24}$

6 - Une voiture avance en ligne droite sur un axe (Ox), en roulant de plus en plus vite. Sa vitesse évolue selon l'équation $v(t) = k\sqrt{t}$ (k étant une constante quelconque). Exprimer son abscisse x à un instant t_0 quelconque, donnée par la relation $x(t_0) = \displaystyle\int_0^{t_0} v(t)\, dt$.

A : $x(t_0) = k\sqrt{t}\, t_0$

B : $x(t_0) = \dfrac{k}{2}\sqrt{t}\, t_0$

C : $x(t_0) = k\, t_0^{3/2}$

D : $x(t_0) = \dfrac{2k}{3}\, t_0^{3/2}$

7 - Lors de la charge du condensateur dans un circuit RC, sous une tension E, le courant $i(t)$ évolue de la façon suivante : $i(t) = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$.

Calculer l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans la résistance, sachant qu'elle vaut $W_J = \displaystyle\int_0^{+\infty} Ri^2(t)\, dt$.

A : $W_J = CE^2$

B : $W_J = \dfrac{1}{2} CE^2$

C : $W_J = \dfrac{1}{2}\dfrac{E^2}{R}$

D : $W_J = \dfrac{E^2}{R}$

8 - Un skieur de masse m descend une pente faisant un angle α avec l'horizontale. Il existe une force de frottement fluide, de coefficient λ. La vitesse du skieur vaut :

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

où $\tau = \frac{m}{\lambda}$. Exprimer à un instant t_0 la position du skieur, donnée par $x(t_0) = \displaystyle\int_0^{t_0} v(t)\, dt$.

A : $x(t_0) = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha)\left(t_0 + \tau e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)$

B : $x(t_0) = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha)\left(t_0 - \tau e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)$

C : $x(t_0) = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha)\left(t_0 - \tau + \tau e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)$

D : $x(t_0) = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha)\left(t_0 - \tau - \tau e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)$

9 - Pour pouvoir calculer la pression $P(z)$ dans l'atmosphère, sa température diminuant linéairement avec l'altitude, on a besoin de l'intégrale :

$$K = \int_0^{z_0} \frac{1}{1-az}\,dz$$

la fraction $\dfrac{1}{1-az}$ restant toujours strictement positive. Exprimer K en fonction de a et z_0.

A : $K = a\,\ln(1-az_0)$

B : $K = \dfrac{1}{a}\,\ln(1-az_0)$

C : $K = a\,\ln\left(\dfrac{1}{1-az_0}\right)$

D : $K = \dfrac{1}{a}\,\ln\left(\dfrac{1}{1-az_0}\right)$

10 - Un barrage vertical plan, de largeur L, retient une hauteur h d'eau. La force de pression F_p qu'exerce l'eau sur le barrage vaut :

$$F_p = \int_0^h [P_0 + \rho g(h-z)]L\,dz$$

Calculer F_p.

A : $F_p = \left(P_0 h + \rho g \dfrac{h^2}{2}\right) L$

B : $F_p = \left(P_0 h - \rho g \dfrac{h^2}{2}\right) L$

C : $F_p = \left(P_0 + \rho g \dfrac{h^2}{2}\right) L$

D : $F_p = \left(P_0 - \rho g \dfrac{h^2}{2}\right) L$