

LOGIQUE, ENSEMBLES, RÉDACTION

MATHÉMATIQUES PTSI

Table des matières

1. Assertions mathématiques.....	1
2. Ensembles : modes de définition et notations.....	9
3. Règles de rédaction.....	11

1. ASSERTIONS MATHÉMATIQUES

1.1. Généralités

DÉFINITION 1.1. — *Une assertion mathématique est une phrase impliquant des objets mathématiques, et qui est soit vraie, soit fausse (et pas les deux).*

Plus simplement, une assertion est une affirmation. Dire qu'elle est vraie signifie qu'il en existe une démonstration. Dire qu'elle est fausse signifie qu'il existe une démonstration de son contraire (cf. paragraphe 1.6 ci-après). Connaître une assertion mathématique se réduit à savoir si elle est vraie ou fausse.

Exemple 1.2. — Voici deux exemples :

- « La fonction $\exp$ est croissante » est une assertion mathématique. Elle est vraie.
- « 3 est un nombre pair » est aussi une assertion mathématique. Elle est fausse.

Le but de ce paragraphe est de passer en revue quelques règles non exhaustives de *logique*, la discipline qui permet de déterminer si une assertion A est vraie lorsque celle-ci s'exprime à partir d'assertions plus simples et des *connecteurs logiques*. Un peu plus loin dans le cours, nous verrons alors comment, en pratique, on **rédige** une preuve d'assertions impliquant ces connecteurs logiques.

1.2. L'équivalence

DÉFINITION 1.3. — Soient A et B deux assertions. On dit que A et B sont équivalentes si A et B sont toutes les deux vraies, ou si A et B sont toutes les deux fausses. On écrit alors

$$A \iff B$$

Un petit mot de terminologie. L'assertion $A \iff B$ se lit « A si et seulement si B » ou « A et B sont équivalentes » ou encore « A est équivalente à B ».

Attention : de part et d'autre du symbole $\iff$, il y a des **assertions mathématiques**. Par exemple, si f et g sont des fonctions et x est un réel, la phrase

$$f(x) \iff g(x)$$

n'a aucun sens. Vous vouliez écrire que $f(x)$ et $g(x)$ étaient égales ? Et bah il fallait utiliser le symbole « égale » :

$$f(x) = g(x).$$

RÈGLE. — Ne pas confondre $\iff$ avec $=$

1.3. Les connecteurs **ET** et **OU**

DÉFINITION 1.4. — Soient A et B deux assertions mathématiques. On définit l'assertion A ET B par la table de vérité suivante :

A ET B :

		B	
		<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>
A	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>
	<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>

Autrement dit, l'assertion A ET B est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.

DÉFINITION 1.5. — Soient A et B deux assertions mathématiques. On définit l'assertion A OU B par la table de vérité suivante :

A OU B :

		B	
		<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>
A	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>
	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>

Autrement dit, l'assertion $A \text{ OU } B$ est vraie si et seulement si au moins l'une des deux assertions est vraie.

Exemple 1.6. — L'assertion « exp est croissante et 3 est impair » est fausse. L'assertion « exp est croissante ou 3 est impair » est vraie.

1.4. Le connecteur $\implies$

DÉFINITION 1.7. — Soient A et B deux assertions mathématiques. On définit l'assertion $A \implies B$ par la table de vérité suivante :

$$A \implies B:$$

		B	
		$Faux$	$Vrai$
A	$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
	$Vrai$	$Faux$	$Vrai$

Autrement dit, $A \implies B$ est toujours vraie, sauf si A est vraie et B est fausse. La phrase $A \implies B$ se lit « A implique B ».

En pratique, seule la seconde ligne de cette table de vérité nous sera utile. Dans ce cadre, il faut alors comprendre le $\implies$ ainsi : **si** A est vrai, **alors** B est vrai.

Terminologie 1.8. — Soient A et B deux assertions mathématiques telles que $A \implies B$.

- On dit que A est l'*hypothèse* et B est la *conclusion*.
- On dit aussi que A est une *condition suffisante* à B , et que B est une *condition nécessaire* à A .

Vous rencontrerez le symbole $\implies$ dans votre cours et dans certains exercices.

Exemple 1.9. — On peut par exemple trouver dans un cours de Terminale :

THÉORÈME. — Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

$$f' > 0 \implies f \text{ est strictement croissante.}$$

Exemple 1.10. — Vous pourriez être amenés à résoudre l'exercice suivant :

EXERCICE. — Soit $x > 0$ un nombre réel. Montrer :

$$x \neq 1 \implies x + \frac{1}{x} > 2.$$

Nous verrons plus tard comment rédiger la démonstration d'un $\implies$. Pour le moment, voyons deux confusions classiques.

Implication vs *donc*. — Une erreur classique est de confondre $\implies$ avec « Donc ».

Imaginons une copie d'élève. On demande à cet élève de montrer que 8 est pair. Ce dernier souhaite montrer que 8 vérifie la définition des entiers pairs : être un multiple de 2. Or voici ce qu'il écrit :

EXERCICE. — *Montrer que 8 est pair.*

SOLUTION DE L'ÉLÈVE. — *On a :*

$$8 = 2 \times 4 \implies 8 \text{ est pair.}$$

Qu'a écrit l'élève ? Il a écrit que **si** $8 = 2 \times 4$ est vrai, **alors** 8 est pair. Le problème : cela ne répond pas à l'exercice. En effet, ce dernier demande de montrer que 8 est pair, pas de donner *condition* sous laquelle l'assertion « 8 est pair » est vraie. Vous me direz : oui mais la condition $8 = 2 \times 4$ est vraie ! En effet, mais il fallait aussi l'écrire alors. Ainsi, pour que la solution de l'élève soit acceptable, il aurait fallu compléter ainsi :

SOLUTION. — *On a $8 = 2 \times 4$. Or,*

$$8 = 2 \times 4 \implies 8 \text{ est pair.}$$

Donc 8 est pair.

C'est un peu compliqué non ? Heureusement, on peut s'épargner ces lourdeurs juste en utilisant « donc » :

SOLUTION. — *On a $8 = 2 \times 4$. Donc 8 est pair.*

En résumé, il faut faire attention à ne pas confondre :

- « $A \implies B$ », qui signifie : **si** A est vraie, alors B est vraie.
- « A donc B », qui signifie : **comme** A est vraie, alors B est vraie aussi.

Une solution à un exercice demande évidemment l'utilisation massive du « donc », et de tous ses synonymes : « ainsi », « alors », « par conséquent », « par suite », « il s'en suit », etc. Mais attention : $\implies$ n'en est pas un. Ce symbole apparaît dans les cours de maths et dans des énoncés d'exercice, et il n'a pas sa place dans votre copie (sauf dans le cas où vous souhaitez recopier l'énoncé d'un exercice ou d'un théorème). C'est pourquoi je vous demande de respecter la règle très simple suivante :

RÈGLE. — *Ne jamais écrire le symbole $\implies$ dans vos copies.*

Implication vs équivalence, et terminologie. — Une remarque très simple et fondamentale. Soient A et B deux assertions. Alors $A \iff B$ est la même chose que $A \implies B$ et $B \implies A$:

PROPRIÉTÉS 1.11. —

$$(A \iff B) \iff \begin{cases} A \implies B \\ \text{et} \\ B \implies A \end{cases}$$

Démonstration. — La table de vérité de $A \implies B$ est

A \ B	Faux	Vrai
	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai

Celle de $B \implies A$ est

A \ B	Faux	Vrai
	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Ainsi, la table de vérité de $\begin{cases} A \implies B \\ \text{et} \\ B \implies A \end{cases}$ est

A \ B	Faux	Vrai
	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Vrai

qui est exactement la table de vérité de $A \iff B$. □

DÉFINITION 1.12. — Soient A et B deux assertions mathématiques. On dit que l'implication $B \implies A$ est la réciproque de $A \implies B$.

Une chose intéressante dans la preuve ci-avant, c'est qu'on s'aperçoit que les tables de vérité de $A \implies B$ et $B \implies A$ ne sont pas les mêmes. Ainsi, ces deux assertions ne sont pas équivalentes. Voyons quelques exemples concrets pour s'en convaincre :

Exemples 1.13. — — Pour avoir le permis de conduire, il faut avoir au moins 18 ans. Mathématiquement, cette phrase est une implication. C'est :

« avoir le permis de conduire » $\implies$ « avoir au moins 18 ans ».

Cette implication est vraie. Regardons sa réciproque :

« avoir au moins 18 ans » $\implies$ « avoir le permis de conduire ».

Elle est fausse !

— Soit n un entier naturel. L'assertion suivante est vraie :

$$n \text{ est divisible par } 6 \implies n \text{ est pair.}$$

Ici encore, la réciproque de cette implication est fausse.

— Soient x, a, b des réels. Toutes les implications suivantes sont vraies, et leur réciproque est fausse :

$$x = 1 \implies x^2 = x, \quad a = b \implies a^2 = b^2, \quad 0 < a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

RÈGLE. — *Ne pas confondre $\implies$ avec $\iff$*

Exercice 1.14. — Expliquez pourquoi les réciproques au dernier point de 1.13 sont fausses.

1.5. Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Soit E un ensemble. On considère une assertion mathématique $A(x)$ dont la valeur, Vraie ou Fausse, dépend de x un élément de E .

1.5.1. « Pour tout ». —

DÉFINITION 1.15. — *L'assertion :*

$$\forall x \in E, A(x) \text{ est vraie}$$

signifie que $A(x)$ est toujours vraie, i.e. $A(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E .

Exemple 1.16. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

signifie que si on remplace x par n'importe quel réel, alors $x^2 + 2x + 1$ est positif. Cette assertion est vraie, et il faudrait donc en fournir une preuve. Nous verrons plus tard dans le cours comment rédiger la démonstration d'une assertion commençant par $\forall$.

Remarque 1.17. — Il n'y a aucune obligation à utiliser le symbole $\forall$ dans une assertion mathématique : on peut tout simplement écrire « pour tout ». Par exemple, l'élève qui écrit en conclusion de sa solution :

...Nous venons donc de montrer :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

a rédigé tout à fait correctement.

Exercice 1.18. — Pensez-vous que les assertions suivantes soient vraies ? (Répondre sans justification)

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

(2) $\forall x \in [0, \pi], x \geq 0$.

—

1.5.1.1. « Il existe ». —

DÉFINITION 1.19. — L'assertion :

$\exists x \in E$ tel que $A(x)$ est vraie.

signifie qu'il existe au moins un x dans E tel que $A(x)$ est vraie.

Exemple 1.20. — L'assertion

$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) > 0$

signifie que parmi tous les nombres réels, il y en a au moins un, que l'on note x , et qui vérifie $\cos(x) > 0$. Là encore, nous n'avons écrit qu'une affirmation sans preuve. On verra plus tard comment rédiger la preuve d'une assertion commençant par $\exists$.

Remarque 1.21. — On peut remplacer $\exists$ par « il existe ».

—

1.5.1.2. « Il existe un unique ». —

DÉFINITION 1.22. — L'assertion :

$$\exists! x \in E \text{ tel que } A(x) \text{ est vraie.}$$

signifie qu'il existe un et un seul x dans E tel que $A(x)$ est vraie.

Exemple 1.23. — L'assertion

$$\exists! x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \ln(x) = 0$$

signifie que parmi tous les nombres réels strictement positifs, il y en a un, que l'on note x , qui vérifie $\ln(x) = 0$, et qui le seul à vérifier ça.

Remarque 1.24. — On peut remplacer $\exists!$ par « il existe un unique ».

1.6. Négation

DÉFINITION 1.25. — Soit A une assertion mathématique. On note $\neg A$ l'assertion qui est vraie si et seulement si A est fausse.

Nous allons maintenant voir des formules essentielles de logique :

PROPOSITION 1.26. — Soient A et B deux assertions. Alors

- (1) $\neg(A \text{ ET } B) \iff \neg A \text{ OU } \neg B.$
- (2) $\neg(A \text{ OU } B) \iff \neg A \text{ ET } \neg B.$
- (3) $\neg(A \implies B) \iff A \text{ ET } \neg B.$

Démonstration. — Il suffit de dresser les tables de vérités et de constater que ces 3 équivalences sont vraies. $\square$

Exemples 1.27. — — La négation de « fromage **ou** dessert » est « pas de fromage **et** pas de dessert ».

— La négation de « $1 \leq x$ **et** $x \leq 2$ » est « $x < 1$ **ou** $x > 2$ ».

Voyons maintenant la négation d'une assertion commençant par un quantificateur :

PROPOSITION 1.28. — Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion qui dépend de $x \in E$. Alors

- (1) $\neg(\forall x \in E, A(x) \text{ est vraie}) \iff (\exists x \in E \text{ tel que } A(x) \text{ est fausse})$
- (2) $\neg(\exists x \in E \text{ tel que } A(x) \text{ est vraie}) \iff (\forall x \in E, A(x) \text{ est fausse})$

Démonstration. — Admise $\square$

Exemples 1.29. — — La négation de « **tous** les élèves de la classe sont des garçons » est « **il existe** une fille dans la classe ».

— La négation de « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. ».

Exercice 1.30. — Pour chacune des assertions suivantes, donner sa négation puis dites, sans justification, laquelle des 2 vous paraît juste :

(1) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = 0$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ ET $\cos(x) < 2$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) > 0$ OU $\sin(x) < 2$.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) > 0 \implies \frac{1}{x} < 1$.

2. ENSEMBLES : MODES DE DÉFINITION ET NOTATIONS

2.1. Ensembles finis définis par énumération

Soit E un ensemble et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E . On note

$$\{x_1, \dots, x_n\}$$

la partie de E dont les éléments sont les x_i avec i allant de 1 à n .

DÉFINITION 2.1. — Soit A un ensemble fini. On appelle cardinal de A le nombre d'éléments de A .

Terminologie 2.2. — Soit A un ensemble fini. Si A n'a qu'un seul élément, on dit que A est un *singleton*.

Exemple 2.3. — L'ensemble $\{0\}$ est une partie de $\mathbb{R}$. C'est un singleton puisqu'il ne contient qu'un élément.

Exemple 2.4. — L'ensemble $\{-\pi, \pi\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal 2. On peut aussi la noter $\{\pm\pi\}$. Attention à ne pas confondre cette partie finie avec l'intervalle $[-\pi, \pi]$ qui, lui, est un ensemble infini.

Exemple 2.5. — Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{0, \dots, n\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et n . Son cardinal est $n + 1$. Les pays francophones le note aussi $\llbracket 0, n \rrbracket$.

2.2. Ensembles définis par compréhension

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une assertion portant sur les éléments x de E . On note

$$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

l'ensemble des éléments x de E pour lesquels l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On dit alors que cet ensemble est *défini par compréhension*.

Exemple 2.6. — L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$$

est l'ensemble des entiers naturels n qui peuvent s'écrire $n = 2k$ pour un certain entier naturel k . C'est tout simplement l'ensemble des entiers naturels pairs !...

Exemple 2.7. — L'ensemble

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$$

est l'ensemble des réels x dont la valeur absolue est inférieure à 1. C'est tout simplement l'intervalle $[-1, 1]$!...

Exemple 2.8. — L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0\}$$

est l'ensemble des racines du polynôme $X^3 - 2X^2 + 3X - 1$.

Exercice 2.9. — Dire simplement quel est l'ensemble suivant :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2p + 1\}.$$

Exercice 2.10. — Donner un exemple d'élément de l'ensemble suivant :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4p + 3\}.$$

Donner un exemple d'entier qui n'est pas élément de cet ensemble.

Exercice 2.11. — Écrire l'intervalle $]1, 2]$ sous la forme d'un ensemble défini par compréhension.

Exercice 2.12. — Écrire le cercle du plan de centre 0 et de rayon 1 sous la forme d'un ensemble défini par compréhension.

2.3. Ensembles définis par image directe

Soient E et F deux ensembles et $f: E \rightarrow F$ une application. L'ensemble

$$\{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}$$

est parfois noté plus simplement :

$$\{f(x) ; x \in E\}.$$

On le comprend ainsi : $\{f(x) ; x \in E\}$ est l'ensemble de tous les $f(x)$ quand x parcourt tous les éléments de E .

Exemple 2.13. — L'ensemble des entiers naturels pairs peut être noté

$$\{2n ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple 2.14. — On considère l'ensemble

$$E = \{x^2 ; x \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $y \in E$ si et seulement si $y = x^2$ pour un certain réel x . Autrement écrit, $y \in E \iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = x^2$.

Exercice 2.15. — Écrire l'ensemble des entiers impairs sous la forme d'un ensemble défini par image directe.

Exercice 2.16. — Écrire la première bissectrice du plan sous la forme d'un ensemble défini par image directe.

3. RÈGLES DE RÉDACTION

On présente ici les règles de rédaction usuelles.

3.1. Montrer un $\forall$

Pour montrer une assertion mathématique de la forme

$$\forall x \in E, P(x)$$

où P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E , on écrit

Soit $x \in E$,

et on montre que $P(x)$ est vraie pour ce x .

Exemple 3.1. — Montrons

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0.$$

Voici une preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors $x^2 \geq 0$ et donc $x^2 + 1 \geq 1$. En particulier, $x^2 + 1 > 0$.

Remarque 3.2. — L’assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

porte sur tous les éléments x de E . Dans l’exemple précédent, $E = \mathbb{R}$, et il y a même une infinité de x pour lesquels on demande de montrer $x^2 + 1 > 0$. Pourtant, on ne fournit qu’une seule preuve : on montre $P(x)$ pour un seul x , celui que l’on s’est donné en écrivant

Soit $x \in E$.

Cela suffit : si l’on ne suppose rien d’autre sur x que le fait qu’il appartienne à E , la démonstration de $P(x)$ obtenue pour ce x est valable pour tous les autres éléments de E .

Exercice 3.3. — Montrer $\forall x \in \mathbb{R}^*, x + \frac{1}{x} \neq 0$.

Exercice 3.4. — Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

3.2. Montrer un $\exists$

Pour montrer une assertion mathématique de la forme

$$\exists x \in E \text{ tel que } P(x).$$

où P est une propriété portant sur les éléments d’un ensemble E , on exhibe/construit un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. La difficulté est de trouver un exemple de x . Une fois ce x trouvé (au brouillon), on rédige simplement

On pose $x = \dots$

et on montre que $P(x)$ est vraie pour ce x .

Exemple 3.5. — Montrons

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 + 1 = 2.$$

Voici une preuve :

On pose $x = -1$.
Alors, $x^2 = 1$ et donc $x^2 + 1 = 2$.

Exercice 3.6. — Montrer :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} = 0.$$

Exercice 3.7. — Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer :

$$\exists y \in]0, +\infty[\text{ tel que } y < x.$$

3.3. Montrer un ET

Il n'y a pas grand chose à dire ici. Si A et B sont deux assertions, pour montrer l'assertion A ET B , on montre A , puis on montre B (ou l'inverse). Il y a donc 2 démonstrations à produire, *a priori* indépendantes l'une de l'autre.

3.4. Montrer un OU

Soient A et B deux assertions. Pour montrer l'assertion A OU B , on suppose que A est fausse et on montre B (ou l'inverse : on suppose que B est fausse et on montre A).

Exemple 3.8. — Soit $x > 0$ un réel. On veut montrer :

$$x \geq 1 \text{ ou } \frac{1}{x} \geq 1.$$

Voici une démonstration :

On suppose que $x \geq 1$ est fausse. Comme $x > 0$, cela signifie

$$0 < x < 1.$$

On sait alors que $\frac{1}{x} > \frac{1}{1}$. En particulier, $\frac{1}{x} \geq 1$.

3.5. Montrer un $\implies$

Soient A et B deux assertions. Pour montrer l'assertion $A \implies B$, on suppose que A est vraie et on montre B est vraie. On écrira donc en début de démonstration :

Hypothèse : A

avant de montrer que B est vraie (certainement en utilisant notre hypothèse, c'est-à-dire que A est elle-même vraie).

Exemple 3.9. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer

n est divisible par 6 $\implies n$ est pair.

Voici une démonstration :

Hypothèse : n est divisible par 6.

On sait qu'il existe un entier k tel que $n = 6k$. Cela se réécrit $n = 2 \times 3k$. Or $3k$ est entier, donc n est pair.

Exercice 3.10. — Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Montrer :

$$f \text{ est croissante} \implies f(n) \leq f(n^2).$$

Exercice 3.11. — Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer :

$$f \text{ est décroissante} \implies f \circ f \text{ est croissante}$$

Remarque 3.12. — On verra un peu plus tard dans l'année une autre façon de montrer une implication (la *contraposée*).

3.6. Montrer un $\iff$

Il n'y a pas grand chose à dire. Soient A et B deux assertions. Pour montrer $A \iff B$, on peut

– Montrer $A \implies B$ puis $B \implies A$ (cf. le paragraphe précédent). Il y a alors 2 démonstrations distinctes à produire. C'est ce que l'on appelle *procéder par double implication*.

– Si l'équivalence est « facile », on peut peut-être montrer $A \iff B$ par une succession d'équivalence reliant A à B .

Exemple 3.13. — Soient a et b deux réels. On veut montrer :

$$a^2 = b^2 \iff a = \pm b.$$

Voici une preuve :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \\ &\iff (a - b)(a + b) = 0 && \text{d'après une identité remarquable classique} \\ &\iff a - b = 0 \text{ ou } a + b = 0 && \text{car un produit est nul si et seulement si} \\ &&& \text{l'un des facteurs est nul} \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b \\ &\iff a = \pm b. \end{aligned}$$

Exercice 3.14. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$x \geq 0 \iff \sqrt{x^2} = x.$$

On procédera par double implication.

3.7. Règles générales

Voici une liste non exhaustive de règles à respecter et d'erreurs communes à ne pas faire. Certaines d'entre elles ont d'ailleurs déjà été vues.

(1) Les symboles mathématiques, comme par exemple $\forall$ et $\exists$, ne doivent pas être utilisés comme abréviations.

(2) On ne considère jamais une variable x sans expliquer dans quel ensemble E elle vit : on écrit donc

$$\text{Soit } x \in E$$

avant d'utiliser la variable x .

(3) Ne pas utiliser le symbole $\implies$.

(4) Ne pas confondre le symbole $\iff$ avec « donc ».

(5) Ne pas confondre le symbole $\iff$ avec $=$.

(6) Lorsque l'on utilise une équivalence non évidente, on la justifie.

(7) On ne dérive pas une fonction avant d'avoir déterminé son domaine de dérivabilité.

(8) Ne pas confondre une *fonction* f avec son *expression* $f(x)$, ou une *suite* $(u_n)_n$ avec un de ses termes u_n . On rappelle à ce propos :

(a) qu'on ne dérive que des fonctions, et pas leur expression. Par exemple, écrire

$$(x^2 - \ln(x))'$$

n'a aucun sens. On peut à la place poser $f: x \mapsto x^2 - \ln(x)$ et alors écrire $f'(x)$ (et surtout pas $f(x)'$). On peut aussi utiliser la notation $\frac{d(x^2 - \ln(x))}{dx}$ des physiciens.

(b) certains adjectifs caractérisent des fonctions ou suites, et **non des expressions ou termes**. Par exemple, écrire

$$e^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

ou

$$n^2 + n \text{ est croissante}$$

n'a aucun sens. On écrit

$$\text{La fonction } \exp \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

ou

$$\text{La suite } (n^2 + n)_n \text{ est croissante.}$$

(9) Lorsque l'on utilise la ou les conclusions d'un résultat du cours, on l'annonce par une phrase de la forme :

D'après un Théorème du cours

ou

D'après le Théorème de * * *

si le résultat a un nom.

(10) Si ce résultat a des hypothèses d'application, on vérifie chacune d'elles scrupuleusement.

MATHÉMATIQUES PTSI

Lycée PARC DE VILGÉNIS

E-mail : jf.planchat@gmail.com