Feuille d'exercices 1

Fonctions de la variables réelles

Exercice 1— Résoudre les inéquations : $\frac{x}{2-x} < 1$ et $\frac{x-2}{x-1} < \frac{x-1}{x-5}$.

Exercice 2— Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \ln(2-x)$,
- $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,
- $x \mapsto \frac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$,
- $x \mapsto \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$,
- $x \mapsto \ln(\ln x)$,
- $x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$,
- $x \mapsto g \circ f(x)$ où $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

Dériver chacune de ces fonctions.

Exercice 3— Montrer pour tout réel $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 4— Pour tout réel m, on pose $f_m(x) = \frac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ aux points d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ aux points d'abscisse 1 sont concourrantes.

Exercice 5— Montrer que la fonction sin est infiniment dérivable et que sa dérivée d'ordre n est $x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Proposer un énoncé équivalent pour la fonction cos.

Exercice 6— Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \ln(x)$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à préciser. On note alors g sa réciproque. Montrer que g est dérivable sur E.

Exercice 7— Reprendre l'énoncé précédent avec la fonction $x \mapsto x + \sin(x)$. Attention ici, la réciproque n'est pas dérivable partout.

Exercice 8— Etudier et tracer la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. En déduire les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^*$ tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$. Application : lequel est le plus grand, e^π ou π^e ?

Exercice 9—

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que $y \geq 1$ puis que $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Montrer que $y \in]-1,1[$ puis que $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Exercice 10— 1. Montrer

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u = \sin(\arctan x)$ et $v = \cos(\arctan x)$. Déterminer le signe de v. Exprimer u et v comme fonctions simples de x.
3. Simplifier $\tan(\arcsin x)$ et $\tan(\arccos x)$.

Exercice 11 (Manipulations des fonctions spéciales)— Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \ln(x^2-1) + \ln(4) = \ln(4x-1), \quad (E_2) : 2^{x^2} = 3^{x^3}, \quad (E_3) : 2^{x+1} + 4^x = 15,$$
$$(E_4) : \frac{\ln a}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad (E_5) : \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2,$$
$$(E_6) : \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}, \quad (E_7) : 5\cosh x - 3\sinh x = 4, \quad (E_8) : \cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2},$$
$$(E_9) : \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}, \quad (E_{10}) : \arccos x = \arcsin 2x.$$

Exercice 12— Soit x un réel et n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sinh(kx)$.

Exercice 13— Étude de :

$x \mapsto e^{x^2-x-1}$, $x \mapsto x+(1-3x)^{1/3}$, $x \mapsto e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x \mapsto \sinh(\arctan x)$, $x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$

Exercice 14— Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$.
2. En déduire que $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$

Exercice 15— Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ une fonction croissante. On pose

$$A = \{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\}.$$

1. Jusitifier l'existence de $x_0 = \sup A$ et montrer que $x_0 \in [a,b]$.
2. Montrer que x_0 est un *point fixe* de f, i.e. $f(x_0) = x_0$. Indication : montrer que $\alpha = \beta$, c'est montrer $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$.

Exercice 16 (Propriété d'Archimède)— On utilisera l'axiome suivant qui est à la base de la construction de $\mathbb{N}$:

Axiome 1 — *Tout partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un minimum.*

1. Soient a et b deux réels positifs, avec $b \neq 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $nb > a$.
2. Soient a et b deux réels avec $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique entier relatif n tel que

$$nb \leq a < (n+1)b.$$

Exercice 17— Soient $a < b$ deux réels. On admet (provisoirement) qu'il existe des nombres irrationnels ; montrer qu'il existe un irrationnel dans $]a,b[$.