Devoir Maison n°1
Corrigé

Exercice 1— 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
x^4 - 3x^2 - 10 = 0 &\iff X^2 - 3X - 10 = 0 && \text{On pose } X = x^2\\
&\iff X = 5 \text{ ou } X = -2 && \text{après calcul}\\
&\iff x^2 = 5 \text{ ou } x^2 = -2\\
&\iff x^2 = 5 && \text{car } -2 < 0\\
&\boxed{\iff x = \pm\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

2. Après calcul, on trouve que les racines du polynomes $-2x^2 + x + 6$ sont $-3/2$ et 2. Comme son coefficient dominant, -2, est strictement négatif, le cours affirme alors

$$\boxed{-2x^2 + x + 6 \geq 0 \iff -\frac{3}{2} \leq x \leq 2.}$$

3. Soit $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} \geq -1 &\iff x + \frac{1}{x} + 1 \geq 0\\
&\iff \frac{x^2 + 1 + x}{x} \geq 0
\end{aligned}$$

Le signe de x n'est pas trop difficile à déterminer, occupons-nous de celui de $x^2 + x + 1$. Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ est de degré 2 et son discriminant vaut -3 (simple calcul). Ainsi, la quantité $x^2 + x + 1$ garde un signe constant, égale au signe du coefficient dominant de P, c.-à-d. elle reste strictement positive.

La fin est facile, on dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	$+$	‖	$+$
x	$-$	‖	$+$
$\frac{x^2+1+x}{x}$	$-$	‖	$+$

Finalement,

$$\boxed{x+\frac{1}{x}\geq -1 \iff x\in\mathbb{R}_+^*.}$$

4. Le tableau de signe est immédiat :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\frac{1-x}{1+x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1-x}{1+x}>0 \iff]-1,1[\,.}$$

5. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2}\geq 2 &\iff x^2\geq \ln(2) && \text{car } \mathrm{e}^{x^2}>0,\ 2>0 \text{ et } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff |x|\geq\sqrt{\ln(2)} && \text{car } \ln(2)>0 \\ &\boxed{\iff x\in\left]-\infty,-\sqrt{\ln(2)}\right]\cup\left[\sqrt{\ln(2)},+\infty\right[} \end{aligned}$$

Exercice 2— 1. Posons $f\colon x\mapsto \ln\left(1+x+\frac{1}{x}\right)$.

- La fonction $x\mapsto 1+x+\frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x\mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, d'après le troisième point de l'exercice précédent, on a

$$\forall x\neq 0,\quad 1+x+\frac{1}{x}\iff x>0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Calculons la dérivée. On pose $u(x)=1+x+\frac{1}{x}$. Alors

$$u'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{u'(x)}{u(x)} \\ &=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+x+\frac{1}{x}} \\ &=\boxed{\frac{x^2-1}{x\left(x^2+x+1\right)}} && \text{en multipliant en haut et en bas par } x^2. \end{aligned}$$

Le signe d'une telle quantité (c'est une fonction rationnelle) est bien-entendu déterminé grâce à un tableau de signe (encore une fois). Il faut donc au préalable étudier séparement le signe de chacun des facteurs, dans ce cas x^2-1, x et x^2+x+1. Or le domaine est ici $\mathbb{R}_+^*$, si bien que le facteur x reste strictement positif. De plus, le facteur x^2+x+1 reste aussi strictement positif sur $\mathbb{R}$ (déjà vu) et donc *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-1. Ce dernier est un polynome du second degrée dont les racines sont ± 1 et de coefficient dominant strictement positif. Ainsi, en se rappelant qu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x)=0 \iff x=1, \quad \text{et} \quad f'(x)>0 \iff x>1$$

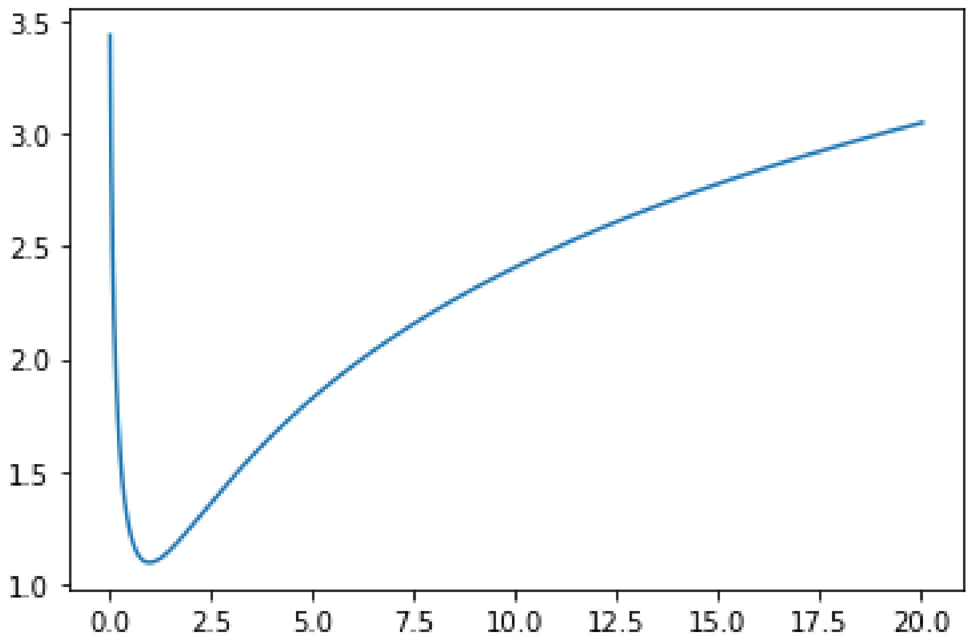
On obtient donc le tableau de variations suivants :

x	0		1		$+\infty$
$f'(|x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Il s'agit de justifier les limites.

- Limite en 0. Il faut se rappeler que l'étude se fait sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on parle donc de la limite en 0^+. Ainsi :
$$\begin{cases} 1+x+\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \\ \ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$
donc $\boxed{f(x)=\ln\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}$.
- Limite en $+\infty$. Elle est directe :
$$\begin{cases} 1+x+\frac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$
donc $\boxed{f(x)=\ln\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Finalement, la courbe de f :



2. Posons $g\colon x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, g est définie en x si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$.

De même, g est dérivable en x si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{1-x}{1+x} > 0$.

Or, d'après l'exercice précédent, on a pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \iff x \in]-1;1], \quad \text{et} \quad \frac{1-x}{1+x} > 0 \iff x \in]-1;1[.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie sur }]-1;1] \text{ et dérivable sur }]-1;1[}$.

Calculons la dérivée. On pose $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $a(x) = 1-x$ et $b(x) = 1+x$. On a

$$u'(x) = \frac{a'(x)b(x) - b'(x)a(x)}{(b(x))^2} = \frac{-1 \times (1+x) - 1 \times (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \boxed{-\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{1-x}}}. \end{aligned}$$

Une telle quantité est strictement négative, clairement.

3. Posons $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$. Il est clair que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   Posons d'abord $u(x) = x-1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$. Posons aussi $t(x) = \frac{x}{x-1}$. Alors
   $$t'(x) = \frac{(x-1)\times(1)-(1)\times x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$
   Ceci nous permet de calculer :
   $$v'(x) = t'(x)\mathrm{e}^{t(x)} = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}.$$
   Finalement :
   $$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (1)\times \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} + (x-1)\times\left(-\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}\left[1-\frac{1}{x-1}\right] \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} \times \frac{x-2}{x-1}.} \end{aligned}$$
   Le signe de cette quantité ne dépend bien sûr pas du facteur $\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$ et est déterminé grâce à, encore une fois, un tableau de signe où l'on étudie séparement le signe de $x-2$ et celui de $x-1$.

Erreurs fréquentes lors de cet exercice :

- Pensez qu'une fonction est dérivable là où elle est définie. C'est faux, et il y a plein de contre-exemples. Lorsque la fonction est "usuelle", ce type de problème arrive essentiellement lorsqu'elle est exprimée avec des $x \mapsto x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ (en particulier pour $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$), $x \mapsto \arccos x$ et $x \mapsto \arcsin x$.
- Oublier de restreindre l'étude du signe de la dérivée au domaine de dérivabilité (dresser un tableau de variation trop grand).

Exercice 3— 1. Soient $a \leq b$ deux réels. Alors $g(a) \geq g(b)$ car g est décroissante. D'où $f(g(a)) \geq f(g(b))$ car f est croissante. Autrement dit, $(f\circ g)(a) \geq (f \circ g)(b)$, CQFD.

2. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante et $1+x^2 > x^2$, on a $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$. D'après un résultat du cours, cela entraine
   $$-\sqrt{1+x^2} < x < \sqrt{1+x^2}$$
   et l'inégalité de gauche donne bien $\boxed{0 < x + \sqrt{1+x^2}}$.

3. On procède par double implication, en commençant par la plus facile.
   Hypothèse : $a = b = 0$. Alors $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$ aussi, si bien que $\boxed{a^2+b^2 = 0}$.
   Montrons maintenant la réciproque.
   Hypothèse : $a^2 + b^2 = 0$. On sait que b^2 et a^2 sont positifs. Or par hypothèse, $a^2 = -b^2$ donc a^2 est aussi négatif. D'où $a^2 = 0$, donc $\boxed{a = 0}$. L'égalité de départ donne alors $b^2 = 0$, d'où $\boxed{b = 0}$ aussi.

4. On remarque que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2bc-2cd-2da$. Alors

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da &\iff 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2bc-2cd-2da=0\\
&\text{(on passe tout du même coté et on multiplie par 2)}\\
&\iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0\\
&\iff a-b=b-c=c-d=d-a=0\\
&\text{d'après (une généralisation de) la question précédente}\\
&\boxed{\iff a=b=c=d}.
\end{aligned}$$

5. Il suffit de prendre $a=-2$ et $b=1$. La bonne équivalence est $|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2$. En effet, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$|a| \leq |b| \iff |a|^2 \leq |b|^2$$

Aor $|a|^2 = a^2$ et $|b|^2 = b^2$, d'où le résultat.