Devoir Surveillé N° 1

Samedi 27 septembre

INSTRUCTIONS : Pensez à laisser une marge à gauche, à numéroter vos pages et à les rendre dans l'ordre. Les résultats doivent être encadrés. Les calculatrices et objets connectés sont interdits.

Questions de cours

1. Citer le théorème sur les inégalités triangulaires.
2. Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure mais pas de maximum.
3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $a \in I$. Donner la définition de « f est dérivable en a ».
   (b) Donner la définition de « f est strictement croissante ».
   (c) Soit J une partie de $\mathbb{R}$. Donner la définition de « f réalise une bijection de I dans J ».
4. Dans tout ce qui suit, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction. Pour chacune des assertions suivantes, donner un exemple de fonction f la vérifiant, puis écrire la négation de l'assertion :
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) > 0$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \geq 0 \implies f(x) \geq 1)$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 1$ et $f(x) \geq -2$.

Exercices

Exercice 1— Résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes, d'inconnue x un nombre réel :

- (E_1) : $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.
- (E_2) : $x^2 + x^{-2} = 2$.
- (E_3) : $|x+1| = |x-2|$.
- (E_4) : $x = \sqrt{2-x}$.

Exercice 2— Donner, pour chacune des 3 fonctions suivantes, son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée :

$$f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{\ln(x)}, \quad g\colon x \mapsto \ln(x^2-1), \quad h\colon x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

Exercice 3— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + x \leq e^x.$$

Exercice 4— Soient $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est monotone. Montrer que f est bornée.

Problème d'analyse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n \colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(\ln(x))^n}{x^2} \end{array}$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Étude pour $n = 1$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f_1. Calculer alors f_1' et donner le tableau de variation de f_1.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1.

Étude pour $n = 2$.

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$.
5. Calculer f_2' et donner le tableau de variation de f_2.
6. Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ en fonction de $x > 0$.
7. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Cas général. On rappelle que si $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à $F(b) - F(a)$, où F désigne n'importe quelle primitive de f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. On pose $F \colon x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{x}$. Calculer F' et en déduire I_1.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose $u(x) = (\ln(x))^{n+1}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$ et
   $$H \colon x \mapsto u(x) \times v(x).$$
   Soit $x > 0$. Calculer $H'(x)$.
   (b) Déduire de la question précédente :
   $$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.$$
10. Calculer I_2 puis l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
11. Soit n un entier naturel non nul. On définit *factorielle* n, noté $n!$, comme étant le produit de tous les entiers compris entre 1 et n :
   $$n! = 1 \times \cdots \times n.$$
   En particulier, on a $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
   (a) Montrer : $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
   (b) Montrer par récurrence sur n :
   $$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$
12. En utilisant un encadrement de la fonction ln sur $[1,\mathrm{e}]$, montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a
   $$0 \leq I_n \leq 1.$$
13. Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Fin de l'épreuve.