Devoir Surveillé N° 1
Correction

Exercices

Exercice 1— 1. (E_1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} &\iff \frac{2}{1+x^2} \leq 1 \\
&\iff \frac{2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \\
&\iff \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \\
&\iff 1-x^2 \leq 0 && \text{car } 1+x^2>0 \\
&\iff x^2-1 \geq 0 \\
&\iff \boxed{x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[} && \text{cf. signe d'une fonction poly. du second degré}
\end{aligned}$$

2. (E_2) Soit $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
x^2 + x^{-2} = 2 &\iff x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\
&\iff \frac{x^4+1}{x^2} = 2. \\
&\iff x^4 + 1 = 2x^2 \\
&\iff x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\
&\iff X^2 - 2X + 1 = 0 && \text{on pose } X = x^2 \\
&\iff X = 1 && \text{après avoir résolu cette equation du second degré} \\
&\iff x^2 = 1 \\
&\iff \boxed{x = \pm 1}.
\end{aligned}$$

3. (E_3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
|x+1| = |x-2| &\iff \mathrm{dist}(x,-1) = \mathrm{dist}(x,2) \\
&\iff x \text{ est équidistant de } -1 \text{ et } 2 \\
&\iff x \text{ est le milieu de } [-1,2] \\
&\iff \boxed{x = 1/2.}
\end{aligned}$$

4. (E_4) Tout d'abord $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$. Soit donc $x \leq 2$.

   On raisonne par analyse-synthèse. Si $x = \sqrt{2-x}$, alors $x^2 = 2 - x$ si bien que x est racine du polynôme $X^2 + X - 2$. Or ces dernières sont $\frac{-1\pm 3}{2} = -2, 1$.

   Inversement, on remarque en remplaçant dans (E_4) que $x = -2$ n'est pas solution. Par contre, $x = 1$ est solution. Ainsi,

$$\boxed{x = \sqrt{2-x} \iff x = 1.}$$

Exercice 2—

- La fonction sin est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, pour tout $x > 0$
$$\ln(x) = 0 \iff x = 1$$
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[}$.
Pour tout x dans cet ensemble,
$$f'(x) = \frac{\sin'(x)\ln(x) - \sin(x)\ln'(x)}{\ln^2(x)}$$
$$\boxed{= \frac{x\cos(x)\ln(x) - \sin(x)}{x\ln^2(x)}}$$

- La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction ln sur $]0,+\infty[$. Il s'agit donc de résoudre $x^2 - 1 > 0$. Or le polynôme $X^2 - 1$ a pour racines 1 et -1 et son coefficient dominant est positif. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x^2 - 1 > 0 \iff x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$
Finalement, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie et dérivable sur }]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$.
Pour tout x dans cet ensemble,
$$\boxed{g'(x) = \frac{2x}{x^2-1}}$$

- La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Il s'agit donc de déterminer le signe $\frac{x}{x+1}$. Or un tableau de signe donne
$$\frac{x}{x+1} \geq 0 \iff x \in]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$$
et
$$\frac{x}{x+1} > 0 \iff x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est définie sur }]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[\text{ et dérivable sur }]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[}$.
Pour tout x dans ce dernier ensemble,
$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \times \frac{\mathrm{d}\frac{x}{x+1}}{\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \times \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$
$$\boxed{= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}(x+1)}}$$

Exercice 3— La fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On a alors clairement, pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$
et
$$f'(x) > 0 \iff x > 0.$$
Le tableau des variations indique alors que f admet un minimum en 0. Or un simple calcul donne $f(0) = 0$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4— Premier cas : f est croissante. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a $a \leq x \leq b$ si bien que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Ainsi, f est minorée par $f(a)$ et majorée par $f(b)$.

Second cas : f est décroissante. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a toujours $a \leq x \leq b$ ce qui cette fois entraine $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$. Ainsi, f est minorée par $f(b)$ et majorée par $f(a)$.

Dans les deux cas, on aboutit à la même conclusion : $\boxed{f \text{ est bornée.}}$

Problème d'analyse

1. On a

   - $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$,
   - $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$.

   Par quotient de limites, on a

   $$\boxed{\lim_{x\to 0} f_1(x) = -\infty.}$$

   Par ailleurs, d'après les croissances comparées, on a

   $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0.}$$

   On en déduit que $\mathcal{C}_1$ admet

   - une asymptote verticale, la droite d'équation $x = 0$,
   - une asymptote horizontale, la droite d'équation $y = 0$.

2. La fonction f_1 est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a

   $$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{(x^2)^2} \\ &= \boxed{\frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}}. \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, x^3 est positif, donc le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$. Or

   $$\begin{aligned} 1 - 2\ln x = 0 &\iff \ln x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \sqrt{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned} 1 - 2\ln x \leq 0 &\iff \ln x \geq \frac{1}{2} \\ &\iff x \geq \sqrt{\mathrm{e}} \qquad \text{car la fonction exp est strictement croissante.} \end{aligned}$$

   Par ailleurs, on a

   $$f_1(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

   On obtient donc de tableau de variation suivant :

x	0			$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3. D'après le cours, cette tangente a pour équation $y = f_1'(x_0)(x - x_0) + f_1(x_0)$. Avec $x_0 = 1$, cela donne

$$\boxed{y = x - 1}$$

4. On a
   - $\lim_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$,
   - $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$.

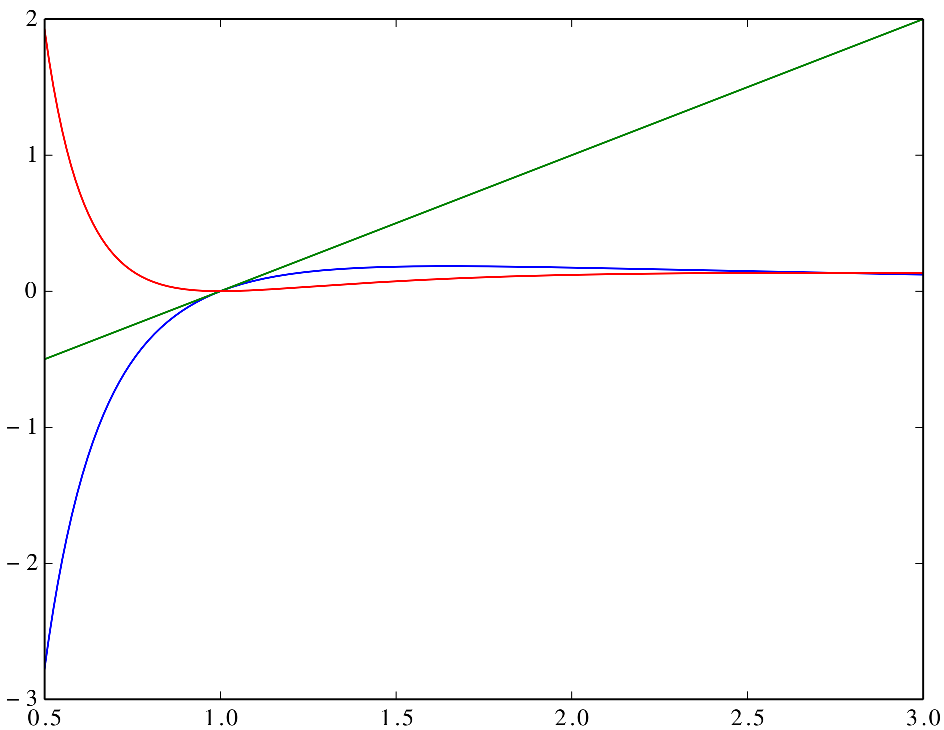
   Par quotient de limites, on a
   $$\boxed{\lim_{x\to 0} f_2(x) = +\infty.}$$
   Par ailleurs, d'après les croissances comparées, on a
   $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = 0.}$$
   On en déduit que $\mathcal{C}_2$ admet
   - une asymptote verticale, la droite d'équation $x = 0$,
   - une asymptote horizontale, la droite d'équation $y = 0$.

5. La fonction f_2 est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a
   $$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{2\frac{\ln(x)}{x} \times x^2 - 2x(\ln(x))^2}{(x^2)^2} \\ &= \boxed{2 \times \frac{\ln(x)(1 - \ln(x))}{x^3}}. \end{aligned}$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2}{x^3}$ est positif, donc le signe de $f_2'(x)$ est celui de $\ln(x)(1 - \ln(x))$. Or
   $$\begin{aligned} 1 - \ln x = 0 &\iff \ln x = 1 \\ &\iff x = e \end{aligned}$$
   et
   $$\begin{aligned} 1 - \ln x \leq 0 &\iff \ln x \geq 1 \\ &\iff x \geq e && \text{car la fonction exp est croissante.} \end{aligned}$$
   De plus,
   $$\ln(x) = 0 \iff x = 1$$
   et
   $$\ln(x) \leq 0 \iff x \leq 1$$
   Par ailleurs, on a
   $$f_2(1) = 0, \quad f_2(e) = \frac{1}{e^2}.$$
   On obtient donc de tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0

6. Soit $x>0$. On a

$$\begin{aligned}
f_1(x)-f_2(x)\leq 0 &\iff \frac{\ln(x)-\ln(x)^2}{x^2}\leq 0\\
&\iff \frac{\ln(x)(1-\ln(x))}{x^2}\leq 0\\
&\iff \ln(x)(1-\ln(x))\leq 0\\
&\iff \boxed{x\in]0,1]\cup[2,+\infty[} \qquad \text{d'après une étude faite en 5.}
\end{aligned}$$



7.

8. La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{-\ln(x)}{x^2} \\ &= \boxed{-f_1(x).} \end{aligned}$$

Ainsi, $-F$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'en suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\mathrm{e}} f_1(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [-F(t)]_1^{\mathrm{e}} \\ &= F(1) - F(\mathrm{e}) \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \\ &= \boxed{\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.} \end{aligned}$$

9. (a) Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction H l'est aussi et on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (n+1)\frac{(\ln(x))^n}{x} \times \frac{-1}{x} + (\ln(x))^{n+1} \times \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(\ln(x))^{n+1}}{x^2} - (n+1)\frac{(\ln(x))^n}{x^2} \\ &= \boxed{f_{n+1}(x) - (n+1)f_n(x).} \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$\forall x > 0, \quad f_{n+1}(x) = H'(x) + (n+1)f_n(x).$$

Ainsi,

$$\int_1^{\mathrm{e}} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} H'(t)\,\mathrm{d}t + (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

se qui se réécrit

$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} H'(t)\,\mathrm{d}t + (n+1)I_n.$$

Reste à évaluer cette intégrale. Il est clair que H est une primitive de H' sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} H'(t)\,\mathrm{d}t &= [H(x)]_1^{\mathrm{e}} \\ &= H(e) - H(1) \\ &= \frac{-1}{\mathrm{e}} - 0 \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.}$$

10. On a,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2I_1 && \text{d'après la question précédente} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2 \times \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} && \text{d'après la question 8.} \\ &= \boxed{\frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}}.} \end{aligned}$$

D'après la question 6, $\mathcal{C}1$ est au-dessus de $\mathcal{C}2$ entre 1 et e. L'aire demandée est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f_1(t) - f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} f_1(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{\mathrm{e}} f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= I_1 - I_2 \\
&= \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} - \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}} && \text{d'après la question 8. et ce qui précède} \\
&= \boxed{\frac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}.}
\end{aligned}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On a

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1) \times \underbrace{n \times \cdots \times 1}_{=n!} \\
&= \boxed{(n+1) \times n!}
\end{aligned}$$

(b) Voici comment rédiger une récurrence.

Initialisation : $n = 1$. On a

$$\frac{I_1}{1!} = \frac{\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}}{1} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

Par ailleurs,

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \times (1+1) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

On observe l'égalité. ✓

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right). \tag{HR}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{-\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n}{(n+1)!} && \text{d'après la question 9.b.} \\
&= -\frac{1}{(n+1)! \times \mathrm{e}} + \frac{n+1}{(n+1)!} I_n \\
&= -\frac{1}{(n+1)! \times \mathrm{e}} + \frac{I_n}{n!} && \text{d'après la question précédente} \\
&= -\frac{1}{(n+1)! \times \mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) && \text{d'après (HR)} \\
&= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right) \checkmark
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme la fonction ln est croissante, on a pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$
$$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(\mathrm{e})$$
soit encore
$$0 \leq \ln(x) \leq 1$$
La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on déduit
$$0^n \leq (\ln(x))^n \leq 1^n$$
soit encore
$$0 \leq (\ln(x))^n \leq 1$$
Par ailleurs, pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$, x^2 est strictement positif. Ainsi
$$0 \leq \frac{(\ln(x))^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$
Conclusion partielle : pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$, on a
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$
On intègre cette inégalité entre 1 et e :
$$\int_1^{\mathrm{e}} 0 \,\mathrm{d}t \leq I_n \leq \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t$$
ce qui donne
$$0 \leq I_n \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
Comme $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est positif, on obtient finalement
$$\boxed{0 \leq I_n \leq 1.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a
$$0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq \frac{1}{n!}. \qquad (♪)$$
Clairement :
$$n! \geq n$$
Comme toute suite minorée par une suite tendant vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$, et la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on voit que
$$n! \to +\infty.$$
Donc $\frac{1}{n!} \to 0$. D'après le Théorème des Gendarmes, l'inégalité (♪) ci-avant donne
$$\frac{I_n}{n!} \to 0.$$
On conclut :
$$1 + \cdots + \frac{1}{n!} = \underbrace{\mathrm{e}\left(\underbrace{1 - \underbrace{\frac{I_n}{n!}}_{\to 0}}_{\to 1}\right)}_{\to \mathrm{e}}$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 1 + \cdots + \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.}$$