Feuille d'exercices 3

Logique, raisonnement par récurrence et calculs algébriques

1 Un peu de logique

Exercice 1— Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. La négation de “f est une fonction paire” est “f est une fonction impaire”.
2. Lorsque la proposition (P et Q) est vraie, la proposition (P ou Q) l'est aussi.
3. Lorsque la proposition $(P \vee Q)$ est vraie, la proposition $(P \wedge Q)$ l'est aussi.
4. La négation de $P \implies Q$ est $P \implies \neg Q$.
5. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
6. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.
7. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+,\ y < \sqrt{x}$.

Exercice 2— Donner la négation de

1. $-1 \leq x < y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exercice 3— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer en langage mathématique (avec des quantificateurs universels et des connecteurs logiques) les assertions qui suivent :

1. La fonction f est majorée par 4.
2. La fonction f est majorée.
3. La fonction f n'est pas majorée.
4. La fonction f est croissante.
5. La fonction f s'annule.
6. La fonction f admet un maximum.

Exercice 4— Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Que pouvez-vous dire sur f si

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$.
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.

Exercice 5 (Raisonnement par contraposée)— 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer

$$[\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon] \implies x = 0.$$

2. Soient n_1, n_2 et n_3 trois nombres entiers naturels. On suppose que $n_1 + n_2 + n_3 = 150$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $n_i \geq 50$.

Exercice 6 (Difficile)— Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

2 Récurrence

Exercice 7— Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 8— Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_1 & = -5 \\ u_{n+2} & = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.

Exercice 9— Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_1 & = 1 \\ u_{n+2} & = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Montrer que pour entier naturel n, $u_n \geq n$.
2. Montrer que pour entier naturel $n \geq 1$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.

3 Manipulation des signes $\sum$, $\prod$ et !

Exercice 10— Simplifier :

1. $\displaystyle\sum_{k=11}^{52} \frac{k-5}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(2^k + 4k + n - 3\right)$
4. $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
7. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

Exercice 11— Soit n un entier naturel non nul. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Exercice 12— Soit n un entier naturel. Calculer la somme

$$n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n.$$

Exercice 13— Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}.$$

Exercice 14— Let n be a non-negative integer. Compute

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

Hint: use the change of index $j = k - 1$.

Exercice 15— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{N} u_k$ pour tout entier $N \geq 1$.

Exercice 16— Soit un entier $n \geq 1$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{k+1!} = \frac{k}{k+1!}.$$

   (b) En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1!}.$$

2. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k!$$

Exercice 17— Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} ij$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i+j$
4. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i2^j,$
5. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \left(1-2^i\right) 2^{ij},$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{1}{l}.$

Exercice 18— Soient k et n deux entiers naturels avec $n \geq 1$. Exprimer ce qui suit sans les $\cdots$:

1. $(k+1)(k+2)\cdots(k+n)$,
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2k+1)$.

Exercice 19— Soit x un réel positif. Montrer “rapidement” que pour tout entier naturel n,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Étudier le cas d’égalité.

Exercice 20— Calculer

1. $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$,
2. $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

On traitera les i) et ii) simultanément. Pour les numéros iii) et iv), on utilisera de manière adequate la fonction $x \mapsto (1+x)^n$.

Exercice 21— Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout entier $n \geq p$

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1},$$

dans un premier temps grâce à une récurrence, puis directement.

Exercice 22— Expliciter la suite

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ \lambda u_{n-1} + 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

   où λ est un réel.

2. $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ 6v_{n-1} - 9v_{n-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$w_n = \begin{cases} \alpha & \text{si } n = 0 \\ 1-\alpha & \text{si } n = 1 \\ w_{n-1} + 6w_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

   où α est un nombre complexe.

4. $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$x_n = \begin{cases} i\sqrt{3} & \text{si } n = 1 \\ 5 & \text{si } n = 2 \\ 4ix_{n-1} + 4x_{n-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$