Les intervalles sont les convexes non vides de $\mathbb{R}$

On montre ici le résultat que nous avions admis en classe et qui affirme qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est non vide et convexe (voir Définition 0.2 et Théorème 0.3 ci-après).

Définition 0.1 (Rappel)— Un *intervalle* est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme

- $[m, M]$ avec $m, M \in \mathbb{R}$ et $m < M$
- $]m, M[$ avec $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $m < M$
- $]m, M]$ avec $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $M \in \mathbb{R}$ et $m < M$
- $[m, M[$ avec $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $m < M$.

Voici maintenant la définition de *partie convexe*.

Définition 0.2— Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *convexe* si, quelque soient $a, b \in A$ avec $a < b$, on a $[a, b] \subset A$.

Alors :

Théorème 0.3 — *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est un intervalle* **si et seulement si** *A est convexe et non vide.*

Démonstration. Il y a bien sur deux implications à montrer. Commençons par la plus simple.

Hypothèse : A est un intervalle. Il y a 4 cas à traiter, correspondant chacun aux 4 types d'intervalle rappelés dans la Définition 0.1. Nous ne traiterons que le cas

$$A = [m, M[$$

dans la mesure où les 3 autres se traitent de manière similaire (laissé en EXERCICE !).

On veut montrer que A est convexe (le fait qu'elle soit non vide a été vu en classe). Soient donc $a < b$ deux éléments de A. Alors

$$m \leq a < b < M \tag{1}$$

On veut montrer que $[a, b] \subset A$. Soit $x \in [a, b]$. Cela signifie $a \leq x \leq b$. Mais d'après (1), $m \leq a$ et $b < M$. Ainsi

$$m \leq x < M$$

ce qui prouve exactement $x \in A$ et conclut cette partie de la preuve.

———

Passons maintenant à la réciproque (plus délicate).

Hypothèse : A est une partie convexe de $\mathbb{R}$ non vide. On veut montrer que A est un intervalle. Il est clair que nous sommes dans une (et une seule) des 4 situations suivantes :

- A est majorée et minorée.
- A n'est ni majorée ni minorée,
- A est minorée mais n'est pas majorée,
- A est majorée mais n'est pas minorée,

Nous ne traiterons que la 4ème situation puisqu'elle contient tous les arguments nécessaires à montrer les 3 premières (elles sont donc laissées en EXERCICE !).

Ainsi, nous supposons que A est majorée mais n'est pas minorée. Notons M sa borne supérieure dont l'existence est assurée par le **Théorème de la borne supérieure** vu en classe. Il y a deux cas à traiter :

1er Cas : $M \in A$. Nous allons montrer que dans ce cas, on a

$$A =]-\infty, M]$$

Soit x in A. Alors il est clair que $x \leq M$ puisque M est un majorant de A si bien que $x \in]-\infty, M]$. Cela prouve $A \subset]-\infty, M]$.

Il faut maintenant montrer l'inclusion réciproque (un peu plus difficile). Soit $x \in]-\infty, M]$. Comme A n'est pas minorée, x n'est pas un minorant de A si bien qu'il existe $a \in A$ tel que $a \leq x$. En outre, par définition même de l'intervalle $]-\infty, M]$, on a $x \leq M$. Ainsi, $x \in [a, M]$. Mais par construction, on a $a, M \in A$: comme A est convexe, on a alors $[a, M] \subset A$. Ainsi, $x \in A$.

2nd Cas : $M \notin A$. Montrons alors

$$A =]-\infty, M[$$

Soit x in A. Alors il est clair que $x < M$ puisque M est un majorant de A mais n'est pas un maximum de A. Ainsi, on a bien $x \in]-\infty, M[$ et donc $A \subset]-\infty, M[$.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque (ici encore, un peu plus difficile). Soit $x \in]-\infty, M[$. Comme A n'est pas minorée, x n'est pas un minorant de A si bien qu'il existe $a \in A$ tel que $a \leq x$.

Par ailleurs, x n'est pas un majorant de A (en effet, M est le plus petit des majorants de A mais $x < M$ par définition). Ainsi, il existe $b \in A$ tel que $x \leq b$.

Donc $x \in [a, b]$. Mais par construction a et b sont dans A, lequel est convexe. Donc $[a, b] \subset A$ ce qui montre $x \in A$ et termine la preuve. $\square$