Réduction

Introduction

Exercice 1.
Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres des matrices suivantes On commencera par chercher le valeurs propres réelles puis les valeurs propres complexes.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque espace propre.
2. En déduire que f est diagonalisable.
3. En déduire une matrice$P$ inversible et une matrice D diagonale telle que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 3.
Calculer les valeurs propres et les sous espaces propres associés pour chacune des matrices suivante

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4.
Soit $M = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres réelles de M.
Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(A-I)(A-2I)$
2. en déduire que A, $(A-I)$ et $A-2I$,ne sont pas inversibles et en déduire 3 valeurs propres distinctes.
3. Calculer les sous espaces propres associé à chacune des valeurs propres trouvées précédemment.

Exercice 6.
Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer $U^2 = 2U + 3I_4$.
2. On note λ une valeur propre éventuelle de U et X_0 un vecteur propre (non nul) associé. Montrer que $\lambda^2 X_0 = 2\lambda X_0 + 3X_0$, puis que $\lambda^2 = 2\lambda + 3$
3. En déduire les seules valeurs propres, et pour chacun de ses valeurs calculer le sous espace propre associé.

Autres calculs

Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B sont diagonalisables.
2. AB est elle diagonalisable ?

Plus théoriques

Exercice 8.

On note Δ l'application de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui à toute fonction f associe f'. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP'. \end{array}$

1. Démontrer que cette application est linéaire
2. Quel est le noyau de u.
3. Quelle est l'image de u
4. Calculer $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et en déduire les valeurs propres de u

Exercice 10 (Transposition)**.**

On note $\tau : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{\mathrm{T}} \end{array}$

1. Montrer que 1 est valeur propre de τ et calculer une base du sous espaces propre associé.
2. Montrer que -1 est valeur propre de τ et calculer une base du sous espaces propre associé.
3. Existe t il d'autres valeurs propres ?
4. Montrer que $\tau \circ \tau = I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et retrouver ce dernier résultat

Exercice 11 ().

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-a)P'. \end{array}$

1. Démontrer que cette application est linéaire
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
3. Quel est le noyau de u.
4. Quelle est l'image de u

Exercice 12 ().

Soit f un endomorphisme de E de dimension finie tel que

$$f^3 + f^2 + f + I_E = 0$$

1. Montrer que les valeurs propres de u sont racines de

$$X^3 + X^2 + X + 1$$

2. En déduire que u est bijectif.

Problèmes

Exercice 13.

E désigne un espace vectoriel réel sur $\mathbb{R}$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base $\mathscr{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) On note λ une valeur propre éventuelle de A_a et X_0 un vecteur propre (non nul) associé. Montrer que $\lambda^2 X_0 = 0$ et en déduire que la seule valeur propre possible de A_a est 0
   (c) A_a est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E
   (b) Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base $\mathscr{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.
3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathscr{B}'$.
   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.
   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.
4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathscr{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 14.

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathbb{R}$.

2. Etudier suivant les valeurs du réels a, l'inversibilité de $A(a)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
   (a) Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.
   (b) Calculer, pour chacune des valeurs propres de A, un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.
4. (a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable?
   (b) calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 15.
On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I et A^2
2. (a) Calculer les valeurs propres de A (on trouvera trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) Pour chaque entier k de $\{1,2,3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A, tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.
   (c) En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3, inversible, de pemière ligne égale à $(1,1,1)$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$.
3. Soient a, b et c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A et J, puis comme combinaison linéaire de I, A et A^2.
   (b) En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'odre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2.c.

Exercice 16.
Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
   Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :
$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$
3. (a) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
   (b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   (a) Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
   (b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

Exercices supplémentaires

Exercice 17.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 18.
On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.
2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
   (b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de f.

(c) Déterminer la dimension du noyau de f.

(d) Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

(a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 19.
Partie 1 : Relations entre matrices.
On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.

(b) Montrer que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales.

(c) En déduire une matrice $D(\alpha, \beta)$ diagonale telle que $\alpha J + \beta K = P \cdot D(\alpha, \beta) \cdot P^{-1}$

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.
Dans cette partie, p désigne un réel de $[0,1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1. (a) Ecrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$.

(b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$)

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.

(b) En déduire que $C_n = \dfrac{1}{4} P \cdot D\left(p, 1-2p\right)^n PC_0$, où $D\left(p, 1-2p\right)$ est la matrice trouvée au 1c puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 20.
On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A_m^2 et A_m^3 ne dépendent plus de m, et vérifier que : $A_m^3 = 2.A_m^2$.

(b) Montrer que $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de A_m et en déduire que : $S_p(A_m) \subset \{0, 2\}$.

2. Dans cette série de questions on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser A_0.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de A_0.

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de A_0.

(c) Montrer que A_0 est diagonalisable, et donner une matrice carrée inversible Q et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ telles que $A_0 = QDQ^{-1}$.

(d) Montrer l'existence de deux réels a et b tels que $A_0^2 = aA_0 + bI_3$.

3. Dans cette série de questions, on suppose que le paramètre m est <u>non nul</u>.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathscr{B}$ est A_m.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de f_m .

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de f_m .
La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

(c) On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad ; \quad v = f_m(u) \quad ; \quad w = e_1 + e_2 - e_3 = (1, 1, -1).$$

Calculer v, $f_m(v)$ et $f_m(w)$.

(d) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à cette base.

(e) En déduire une matrice carrée inversible P_m telle que $P_m^{-1} A_m P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) Existe-t-il des réels c et d tels que $A_m^2 = cA_m + dI_3$?

Exercice 21.
Dans cet exercice, on étudie la diagonalisation des matrices carrées d'ordre 3 antisymétriques (c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$).
On étudie d'abord un cas particulier avant de passer au cas général.

Partie A

1. On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note 0_E l'élément nul de $\mathbb{R}^3$.
   On rappelle que toute famille libre de trois vecteurs de E est une base de E.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E représenté par A dans la base $\mathscr{B}$.
   Soit $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_1 + 2e_2$ et $u_3 = f(u_2)$.
   (a) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
   (b) Montrer que $\mathscr{U}$ est une base de E et déterminer la matrice B représentant f dans cette base.
2. Soit λ un réel non nul.
   Montrer que pour tout vecteur x de E, [$f(x) = \lambda x$] équivaut à [$x = 0_E$].
   On pourra utiliser la décomposition de x dans $\mathscr{U}$.
3. (a) Quel est finalement l'ensemble des valeurs propres de A?
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie B

Soient a, b et c trois réels donnés. On pose $a^2 + b^2 + c^2 = s$ et on suppose $s \neq 0$.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathscr{B}$.

1. (a) Calculer M^2 et M^3.
   (b) Vérifier que M^3 s'exprime simplement en fonction de M et s.
2. Montrer que si le réel λ est valeur propre de g alors λ est nécessairement nul. On utilisera la relation trouvée ci dessus.
3. Montrer que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.
4. (a) Quel est finalement l'ensemble des valeurs propres de M?
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable?

Exercice 22.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.
   (b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.
   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.
   (d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.
   (e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.
2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
   Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega\,;\ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
   (b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
   (c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([S=2] \cap [D=0])$, $\mathbb{P}([S=2])$ et $\mathbb{P}([D=0])$.
   Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes?
   (d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}([S=n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$.
   (e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.