

Géométrie : Produit Scalaire

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Février 2024

Table des matières

I	Produit scalaire	2
II	Orthogonalité	5
II.1	Définition	5
II.2	Base orthogonale/orthonormale	6
II.3	Théorème spectral	7
III	Projection Orthogonale	8
III.1	Sous-espace orthogonal	8
III.2	Projection	8
III.3	Notion de distance	9
III.4	Définitions	9
III.5	Méthode des moindres carrés	10

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul. Les vecteurs seront notés de préférence \vec{u} . Le terme scalaire désignera uniquement les réels, vecteur désignera un vecteur de \mathbb{R}^n .

I Produit scalaire

Définition 1 (Produit vectoriel canonique).

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n le **produit scalaire** est défini par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Proposition 1 (Propriétés).

1. Le produit scalaire est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .
2. Le produit scalaire est **bilinéaire** c'est à dire pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de \mathbb{R}^n et pour tous scalaires α et β

Linéarité à gauche

$$\langle \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w} \rangle =$$

Linéarité à droite

$$\langle \vec{u}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} \rangle =$$

3. Le produit scalaire est une forme **définie positive** c'est à dire que pour tout vecteur \vec{u} .

Positive $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

Définie $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ si et seulement si

Démonstration :

Exercice 1 (Classique : bilinéarité extension).

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ des vecteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_r$ des scalaires. Donner une expression de

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i, \sum_{i=1}^r \mu_i \vec{v}_i \right\rangle =$$

**Définition 2** (Norme euclidienne).

Pour tout vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^n , on note

$$\|\vec{u}\| =$$

Le vocabulaire n'est pas au programme

Proposition 2 (Propriétés de la norme).

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tout scalaire λ .

Positivité $\|\vec{u}\| \geq 0$.

Séparation $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si

Absolute homogénéité $\|\lambda \vec{u}\| =$



Démonstration :

**Théorème 1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Inégalité

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq$$

Cas d'égalité valeur absolue :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \text{ si et seulement si}$$

Cas d'égalité sans valeur absolue :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de même sens c'est-à-dire}$$



Démonstration :

Proposition 3 (Inégalité triangulaire). **Inégalité triangulaire/ sous-additivité :**

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Cas d'égalité : De plus il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens i.e. il existe un réel positif tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

Démonstration :

Exercice 2 (Classique deuxième inégalité triangulaire).

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, montrer que

$$\left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Dans quel cas a t'on égalité?

Proposition 4 (Identités remarquables).

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Identité remarquable : $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Identité remarquable $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$

Identité remarquable $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$

Égalité du parallélogramme

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$$

Identité polaire

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration :



Proposition 5 (Expression matricielle : base canonique).

Soit \vec{u} un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est U et \vec{v} un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est V .

Produit scalaire

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = U^T V$$

Norme

$$\|\vec{u}\|^2 = U^T U$$

Exercice 3.

Attention : Que vaut UU^T ?



II Orthogonalité

II.1 Définition

Définition 3 (Orthogonalité).

Deux vecteurs On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** si et seulement si

Deux matrices colonne On dit que deux matrices colonne de même taille U V sont **orthogonales** si et seulement si



Famille orthogonale Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est dite **orthogonale** si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Famille orthonormale Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est dite **orthonormale** si et seulement si elle est orthogonale et si et seulement si tous les vecteurs sont de norme 1.

On trouve aussi **orthonormée**

Proposition 6 (Liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux).
Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ **orthogonale** dont aucun vecteur est nul est libre.

Démonstration :

Théorème 2 (Pythagore).
Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs alors

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si

Démonstration :

II.2 Base orthogonale/orthonormale

Définition 4 (Base orthonormale/ orthogonale).
Une base de \mathbb{R}^n ou d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qui est aussi une famille orthonormale est dit **base orthonormale**.

Proposition 7 (Caractérisation matricielle).
Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n et P la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} exprimés dans la base canonique alors

\mathcal{B} est une base orthonormale si et seulement si $P^T P = I_n$ si et seulement si $P^{-1} = P^T$

Proposition 8 (Base canonique).
La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale et il existe d'autres bases orthonormales de \mathbb{R}^n .

ou dans une base orthonormale

Démonstration :



Proposition 9 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n , $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i$ deux vecteurs. Alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \quad \|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Proposition 10 (Théorème de la base incomplète version orthogonale).

On peut toujours compléter une famille orthonormale en une base orthonormale de \mathbb{R}^n en la complétant avec des vecteurs de la base canonique

Proposition 11 (Calcul des coordonnées dans une base orthonormale).

Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n , alors

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$$

Démonstration :

À savoir démontrer, la méthode est aussi importante que le résultat



II.3 Théorème spectral

Théorème 3 (Théorème spectral pour une matrice symétrique).

Soit A une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale telles que

$$A = PDP^{-1} \quad P^{-1} = P^T$$

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable avec un changement de bases orthonormales

Théorème 4 (Théorème spectral pour un endomorphisme dont la matrice est symétrique).

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice représentative dans **une base orthonormale (la plus part du temps la base canonique)** est symétrique alors il existe une base orthonormale de \mathbb{R}^n constituée uniquement de vecteur propre de f .

III Projection Orthogonale

Dans cette partie les sous-espaces vectoriels sont par défaut des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

III.1 Sous-espace orthogonal

Définition 5 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on note

$$E^\perp = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n / \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \}$$

Exemple : Calculons l'orthogonal de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

Proposition 12 (Structure de E^\perp).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , alors E^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Proposition 13 (Décomposition dans E, E^\perp).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n

1. Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique couple $(\vec{u}_E, \vec{u}_{E^\perp}) \in E \times E^\perp$ tel que

$$\vec{u} = \vec{u}_E + \vec{u}_{E^\perp}$$

2. $\dim E + \dim E^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$

III.2 Projection

Définition 6 (Projection orthogonale).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n on reprend les notations de 13 et défini

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad p_E(\vec{u}) = \vec{u}_E$$

p_E est la **projection orthogonale** sur E (parallèlement à E^\perp .)

Exemple : Calculons la projection sur $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Proposition 14 (Propriétés d'une projection orthogonale).

1. p_E est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans lui-même.
2. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de F alors

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad p_E(\vec{u}) = \sum_{i=1}^p \langle \vec{e}_i, u \rangle \vec{e}_i$$

III.3 Notion de distance

III.4 Définitions

Définition 7 (Distance).

Entre deux vecteurs Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , la **distance** entre \vec{u} et \vec{v} est

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Entre un vecteur et une partie Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n et \vec{u} un vecteur, alors la **distance** entre \vec{u} et A est définie par

$$d(\vec{u}, A) = \inf\{d(\vec{u}, \vec{v}) / \vec{v} \in A\}$$

Exemple :

Proposition 15 (Propriétés de la distance entre deux vecteurs).

Soit \vec{u}, \vec{v} , et \vec{w} trois vecteurs de \mathbb{R}^n

Symétrie $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$

Séparation $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{v}$.

Inégalité triangulaire $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$

Le vocabulaire n'est pas au programme

Proposition 16 (Distance et projection).

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^n , alors

$$d(\vec{u}, F) = \|\vec{u} - p_F(\vec{u})\|$$

Autrement dit le vecteur de F le plus proche de \vec{u} est $p_F(\vec{u})$

Démonstration :

5

III.5 Méthode des moindres carrés

On suppose que l'on possède deux séries de données mesurées sur une même population

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

On suppose de plus que les données de x ne sont pas constantes.

Définition 8 (Régression linéaire).

Une (la) droite de régression est la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Théorème 5 (Forme théorique).

On note $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur associé à la série x .

On note $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le vecteur associé à la série y .

On note $\vec{u} = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{x})$ alors le minimum de la quantité $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ pour a et b décrivant \mathbb{R} vaut

$$m = d(\vec{y}, F)$$

Ce minimum est atteint pour un unique couple (a, b) qui vérifie

$$p_F(\vec{y}) = a\vec{x} + b\vec{u}$$

Démonstration :



Proposition 17 (Forme pratique).

En reprenant les notations précédentes, la droite de régression linéaire est la droite $y = ax + b$ où

- $a = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2}$.
- $b = \bar{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \bar{x}$
- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ moyenne de x .
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ moyenne de y .
- $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ variance.
- $\sigma_{x,y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \langle \vec{x} - \bar{x} \cdot \vec{u}, \vec{y} - \bar{y} \cdot \vec{u} \rangle$ covariance.

Remarque : On remarque que la droite passe par le point moyen du nuage (\bar{x}, \bar{y}) .

L'exemple historique de Galton "régression vers la moyenne" Même si la méthode des moindres carrés avait déjà été utilisée par Gauss, Dirichlet ... c'est Francis Galton¹ géographe, inventeur, météorologue, écrivain, proto-généticien, psychométricien et statisticien que l'on crédite de son invention. Il est un des premiers défenseurs de la théorie de l'évolution de son cousin Charles Darwin, il est aussi l'un des fondateur de l'eugénisme moderne.

Il utilise la méthode des moindres carrés pour étudier la relation entre les tailles des parents et des enfants.

1. 16 février 1822 – , 17 janvier 1911

