Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 5

Problème 1 : loi à densité de Pareto

Partie 1 : Propriété d'une loi de probabilité.

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. c étant positif, f est à valeur positive. f est continue sur $]-\infty;\ 1[$ car constante et sur $]1;\ +\infty[$ comme fonction usuelle.

   $$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.$$

   Soit $A > 1$ alors

   $$\begin{aligned} \int_1^A f(t)dt &= \int_1^A \frac{c}{t^{c+1}}dt \\ &= \left[-\frac{1}{t^c}\right]_1^A \\ &= 1 - \frac{1}{A^c} \end{aligned}$$

   Comme $c > 0$

   $$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^c} = 0$$

   Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$$

   $$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors on sait que

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

   cas $x < 1$

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

   cas $x \leqslant 1$

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}0dt = 1 - \frac{1}{x^c}$$

   en utilisant les calculs de la questions précédentes

   $$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1 .

   a) On étudie l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x}dx$, la convergence absolue se confond avec la convergence.

   cas $c > 1$ On reconnaît d'ans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{c-1}{x^c}dx$ l'intégrale d'une densité de Paréto, intégrale qui converge, car $c - 1 > 0$ et qui vaut 1

$$\text{Si } c > 1 \ X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{c}{c-1}$$

cas $c = 1$ Soit $A > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{c}{x} dx &= [c \ln x]_1^A \\ &= c \ln A\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$

$$\text{Si } c < 1, X \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

cas $c > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{c}{x^c} dx &= -\frac{c}{c-1}\left[\frac{1}{x^{c-1}}\right]_1^A \\ &= \frac{c}{c-1}\left[1 - \frac{1}{x^{c-1}}\right]\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, et comme $c - 1 < 0$

$$\text{Si } c < 1, X \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance si et seulement si } c > 1 \text{ et dans ce cas là } E(X) = \frac{c}{c-1}.}$$

b) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$. Soit $x > 1$, alors

$$\begin{aligned}P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X > t)} && \text{car } t < xt \\ &= \frac{F(xt) - F(x)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{(xt)^c} - 1 + \frac{1}{t^c}}{1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)} && \text{car } xt \text{ et } t \text{ sont plus grand que } 1 \\ &= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{x^c t^c}}{\frac{1}{t^c}} \\ &= \frac{\frac{1}{t^c}\left(1 - \frac{1}{x^c}\right)}{\frac{1}{t^c}} \\ &= 1 - \frac{1}{x^c}\end{aligned}$$

Si $x < 1$

$$\begin{aligned}P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)} \\ &= \frac{0}{P(X > t)} && \text{car } t \geqslant xt\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } t > 1 \text{ et } x \text{ réel } P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

c) Comme $t > 1$, on constate que $[X \leqslant tx]) = \left[\frac{X}{t} \leqslant x\right]$ et donc

$$\boxed{\text{Pour } t > 1 \text{ et } x \text{ réel } P_{X>t}(Z \leqslant x) = F(x)}$$

On dira que la loi de ${}^{X}/{}_{t}$ conditionnellement à $[X > t]$ est la loi de Pareto.

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y. Dans toute la suite, on suppose que :

— g est nulle sur $]-\infty\,;\ 1[$;

— g est strictement positive et continue sur $[1\,;\ +\infty[$

— pour tout réel t strictement supérieur à 1, $P(Y > t) > 0$;

— pour tout réel t strictement supérieur à 1 et pour tout réel x, $P_{(Y>t)}\left(\dfrac{Y}{t} \leqslant x\right) = P(Y \leqslant x)$.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. On peut dans ce cas utiliser la formule

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

en $x = 1$, on obtient

$$G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt = 0$$

$$\boxed{G(1) = 0}$$

5. a)

$$\begin{aligned}
G(x) &= P(Y \leqslant x) \\
&= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leqslant x\right) && \text{hypopthèse de l'énoncé} \\
&= P_{(Y>t)}\left(Y \leqslant tx\right) && \text{car } t > 0 \\
&= \frac{P\left([Y > t] \cap [Y \leqslant tx]\right)}{P(Y > t)} \\
&= \frac{t < Y \leqslant tx}{P(Y > t)} && \text{car } t < xt \\
&= \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}
\end{aligned}$$

Soit $x \geqslant 1$ et $t > 1$

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \qquad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.}$$

b) Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1\,;\ +\infty[$ et en déduire que : D'après le cours G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf aux points où g n'est pas continue/ Comme g est continue sur $]1$; $+\infty[$

$$\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]1\ ;\ +\infty[.}$$

On peut donc dériver, à t fixé et en fonction de la variable x, les deux termes de l'égalité obtenue dans la question précédente

$$G(x) = \frac{tG(tx) - 0}{1 - G(t)}$$

$$\boxed{\forall x > 1, \forall t > 1, \qquad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.}$$

c) Soit $\forall t > 1$, fixé. On sait que pour $u > 1$, $G'(u) = g(u)$ donc

$$\forall x > 1, \qquad g(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = g(1) = c$ car g est continue sur l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} G'(tx) = G'(x)$ car G' est continue en t , (car $t > 1$).
On obtient donc en faisant tendre x vers 1 par valeurs supérieures

$$\forall x > 1, \qquad c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)}.$$

$$\boxed{\forall t > 1 \qquad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.}$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1\ ;\ +\infty[$, associe $y(t)$. On note (E.1) l'équation différentielle

$$y + \frac{t}{c}y' = 0 \tag{E.1}$$

et (E.2) l'équation différentielle

$$y + \frac{t}{c}y' = 1 \tag{E.2}$$

<u>Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.</u>

a) On peut réécrire l'équation (E.1) sous la forme

$$y' + \frac{c}{t}y' = 0$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{c}{t}$ est continue sur $]1\ ,\ +\infty[$ et un de des primitives est $t \mapsto c \ln t$.
D'après le cours les solutions de (E.1) sont $t \mapsto K \exp(-c \ln t)$

$$\boxed{\text{les solutions de (E.1) sont } t \mapsto \frac{K}{t^c} \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}}$$

b) On constate que $t \mapsto 1$ est une solution de (E.2)

$$\boxed{\text{les solutions de (E.1) sont } t \mapsto \frac{K}{t^c} + 1 \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}}$$

7. a) G es solution de (E.2), il existe donc une constante K telle que

$$\forall t \in]1\ ,\ +\infty[, \qquad G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

Donc

$$\forall t \in]1\ ,\ +\infty[, \qquad g(t) = -\frac{Kc}{t^{c+1}}$$

Or on a vu que

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} g(t) = g(1) = c$$

ce qui impose

$$-Kc = c$$

$$\boxed{\forall t > 1, \qquad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.}$$

On a vue que $G(0) = 0$ ce qui permet de conclure que

$$\forall t \geqslant 1, \qquad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

de plus comme pour $x < 1$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

$$\forall t \geqslant 1, \qquad G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{t^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Pareto

b) $\boxed{Y \text{ suit une loi de Pareto de paramètre } c \text{ .}}$

Partie 3 : Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   a) On peut remqrquer que comme Z prend ses valeurs dans $[1\ ,\ +\infty[$ $\ln(Z)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$

   $$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad H(x) = 0$$

   Soit $x \in R$

   $$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &= P(Y \leqslant \mathrm{e}^x) && \text{car le fonction exponentielle est strictement croissante} \\ &= F(\mathrm{e}^x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{e}^x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^c} & \text{si } \mathrm{e}^x \geqslant 1 \end{cases} && \text{fonction de répartition de } X \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} && \text{propriétés de l'exponentielle} \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

   b) On remarque que H, fonction de répartition de Z, est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre c.

   $$\boxed{Z \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } c \text{ .}}$$

   c) On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ et on note K sa fonction de répartition.
   Une fois encore on peut remarquer que comme U est à valeurs dans $[0\ ;\ 1[$ V est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

Soit x réel

$$\begin{aligned}
K(x) = P(V \leqslant x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) & \\
= P\left(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x\right) & \qquad \text{car } -\lambda < 0 \\
= P\left(1-U \geqslant \exp(-\lambda x)\right) & \qquad \text{car exponentielle est strictement croissante} \\
= P\left(1-\exp(-\lambda x) \geqslant U\right) & \\
= \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\exp(-\lambda x) \leqslant 0 \\ 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } 0 < 1-\exp(-\lambda x) < 1 \\ 1 & \text{si } 1-\exp(-\lambda x) \geqslant 1 \end{cases} & \qquad \text{fonction de répartition de } U \\
= \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \end{cases} & \qquad \text{car } \lambda > 0
\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

$$\boxed{V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda \text{ .}}$$

d) — On utilise la structure classique pour créer une liste, on initialise une liste à [] et on rajoute des éléments à la fin grâce à un `append` dans une boucle `for`
— Pour chaque simulation, on utilise `random` qui simule U.
— Puis on applique $t \mapsto -\dfrac{1}{c}\ln(1-u)$ le résultat obtenu est un nombre au hasard, qui simule Z.
— Puis on applique exponentielle.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
#%%
def simulX(c,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        u=rd.random()
        z=-m.log(1-u)/c
        x=m.exp(z)
        L.append(x)
    return L
```

Problème 2 : recherche de vecteur propre avec Python

On souhaite dans ce problème écrire un programme permettant de calculer, sous certaines conditions, un vecteur propre d'une matrice. Quelques fonctions Python sont rappelées en annexe à la fin du sujet.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Partie 1 : quelques questions de cours

1. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si, et seulement s'il existe $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
   Une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$ s'appelle un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ se note $E_\lambda(A)$ et est défini par :
$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}.$$

3. $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à p.
4. Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ admet p valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Partie 2 : programmation

1. Comme les réels $|m_{i,j}|$ sont positifs, dire que le maximum de ces nombres est nul est équivalent à dire qu'ils sont tous nuls. Donc

$$||M|| = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], |m_{i,j}| = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

On a bien $\boxed{||M|| = 0 \Leftrightarrow M = 0.}$

2.
```
def Norme(M):
    n,p=np.shape(M)
    max=abs(M[0,0])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if abs(M[i,j])>max:
                max=abs(M[i,j])
    return max
```
3.
```
def Normalise(v):
    p=np.shape(v)[0]
    x=np.zeros([p,1])
    a=Norme(v)
    for i in range(p):
        x[i,0]=v[i,0]/a
    return x
```
4.
```
def PuissanceIteree(A,n):
    p=np.shape(A)[0]
    v=np.random.rand(p,1)
    for _ in range(n):
        v=Normalise(np.dot(A,v))
    return v
```
5. Les fonctions `VecteurPropre1` et `VecteurPropre3` sont correctes.
Le problème dans la fonction `VecteurPropre2` vient du fait que la variable `ecart` n'est pas recalculée à chaque passage dans la boucle. La boucle ne va jamais s'arrêter une fois que l'on sera rentrée dedans.

Problème 3 : matrices et probabilités

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

1. a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b = c
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c.}$

b) D'après la question précédente :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc

$\boxed{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille (B, C, D) est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Montrons que cette famille est libre. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$aB + bC + cD = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille (B, C, D) est libre.

Ainsi $\boxed{(B, C, D) \text{ est une base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = 3.}$

2. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de J si, et seulement si, $J - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(J - \lambda I_2) = 0$.

Or $\det(J - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, donc il n'existe aucun réel tel que $\det(J - \lambda I_2) = 0$.

En conclusion, $\boxed{J \text{ n'admet pas de valeur propre réelle.}}$

3. a) De même que dans la question 1.a), on peut montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$.

On obtient donc $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}(J)$.

$\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace engendré par une famille constituée d'un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc

$\boxed{\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

La famille (J) est génératrice de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul donc

$\boxed{(J) \text{ est une base de } \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = 1.}$

b) On a $I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ donc $I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

On a $J \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ donc $J \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

Or $(I_2 + J)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2 + J$ et $(I_2 + J)^T \neq -(I_2 + J)$, donc $I_2 + J \notin \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

Cela prouve que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ n'est pas stable par addition donc

$\boxed{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

4. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $NN^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^T N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $NN^T \neq N^T N$, c'est-à-dire $\boxed{N \notin \mathscr{C}_2(\mathbb{R}).}$

5. a) Soit $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

On a bien $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus, on a deux options :

— soit $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, et alors $MM^T = M^2 = M^T M$;

— soit $M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, et alors $MM^T = -M^2 = M^T M$.

Dans les deux cas, $MM^T = M^T M$, ce qui signifie que $M \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Donc } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_2(\mathbb{R}).}$

b) On a déjà montré que $I_2 + J \notin \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

De plus, $I_2 + J \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $(I_2 + J)(I_2 + J)^T = (I_2 + J)(I_2 - J) = I_2 - J^2$ et $(I_2 + J)^T (I_2 + J) = (I_2 - J)(I_2 + J) = I_2 - J^2$.

Donc $I_2 + J \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.

On a trouvé une matrice qui est dans $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, cela prouve que $\boxed{\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}).}$

6. a) Par définition de $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ ac+bd = ab+cd \\ ac+bd = ab+cd \\ c^2+d^2 = b^2+d^2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b^2 = c^2 \\ (a-d)(c-b) = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = c \\ 0 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} b = -c \neq 0 \\ (a-d)2c = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d)
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d).}$

b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J)
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J).}$

c) On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) &\Leftrightarrow M^T = M \text{ et } \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow aI_2 - bJ = aI_2 + bJ \text{ et } \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ M = aI_2
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) = \{aI_2 / a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(I_2)$.
La famille (I_2) est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)$ et est libre car formée d'un seul vecteur non nul.
Donc $\boxed{(I_2) \text{ est une base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) \text{ et } \dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)) = 1.}$

Partie C : Calculs de probabilités

7. a) Comme $X_i(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, on peut affirmer que $X_i^2(\Omega) = \{0; 1\}$.
De plus, $X_i^2 = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$, donc $P(X_i^2 = 0) = P(X_i = 0) = \dfrac{1}{3}$.
Et $X_i^2 = 1 \Leftrightarrow X_i = 1$ ou $X_i = -1$, donc, comme on a une union d'événements incompatibles, $P(X_i^2 = 1) = P(X_i = 1) + P(X_i = -1) = \dfrac{2}{3}$.
On aurait aussi pu dire que $P(X_i^2 = 1) = 1 - P(X_i = 0)$.
En conclusion, $\boxed{X_i^2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{2}{3}.}$

b) On a $X_iX_j(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. De plus :

$$\begin{aligned}
P(X_iX_j = -1) &= P\left(([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) \cup ([X_i = -1] \cap [X_j = 1])\right) \\
&= P([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) + P([X_i = -1] \cap [X_j = 1]) \text{ union d'evt incompatibles} \\
&= P(X_i = 1)P(X_j = -1) + P(X_i = -1)P(X_j = 1) \text{ VAR supposées indépendantes} \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

De même, $P(X_iX_j=1) = P\left(([X_i=1]\cap[X_j=1])\cup([X_i=-1]\cap[X_j=-1])\right) = \dfrac{2}{9}$.

Et enfin, $P(X_iX_j=0) = P([X_i=0]\cup[X_j=0]) = P(X_i=0)+P(X_j=0)-P([X_i=0]\cap[X_j=0]) = \dfrac{5}{9}$.

En résumé $\boxed{P(X_iX_j=1) = \dfrac{2}{9} = P(X_iX_j=-1) \text{ et } P(X_iX_j=0) = \dfrac{5}{9}.}$

c) On a $\det(A) = X_1X_4 - X_3X_2$. Donc :

$$\begin{aligned}
P(\det(A)=0) &= P\left(([X_1X_4=0]\cap[X_3X_2=0])\cup([X_1X_4=1]\cap[X_3X_2=1])\cup([X_1X_4=-1]\cap[X_3X_2=-1])\right)\\
&= P([X_1X_4=0]\cap[X_3X_2=0]) + P([X_1X_4=1]\cap[X_3X_2=1]) + P([X_1X_4=-1]\cap[X_3X_2=-1])\\
&\qquad \text{union d'evt incompatibles}\\
&= P(X_1X_4=0)P(X_3X_2=0) + P(X_1X_4=1)P(X_3X_2=1) + P(X_1X_4=-1)P(X_3X_2=-1)\\
&\qquad X_1X_4 \text{ et} X_3X_2 \text{ sont indépendantes par le lemme des coalitions}\\
&= \frac{25}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{P\left(\det(A)=0\right) = \dfrac{11}{27}.}$

8. a) Par définition de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P(A\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) &= P(X_2=X_3)\\
&= P\Big(([X_2=0]\cap[X_3=0])\cup([X_2=1]\cap[X_3=1])\cup([X_2=-1]\cap[X_3=-1])\Big)\\
&= \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9},
\end{aligned}$$

avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance que précédemment.

On a donc $\boxed{P(A\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{3}.}$

b) Par définition de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P(A\in\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) &= P\Big([X_2=-X_3]\cap[X_1=0]\cap[X_4=0]\Big)\\
&= P\Big(([X_2=1]\cap[X_3=-1])\cup([X_2=1]\cap[X_3=-1])\cup([X_2=0]\cap[X_3=0])\Big)\\
&\qquad\qquad \times P(X_1=0)\times P(X_4=0)\\
&\qquad \text{car } X_2-X_3, X_1 \text{ et } X_4 \text{ sont indépendantes}\\
&= \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance que précédemment.

On a donc $\boxed{P(A\in\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{27}.}$

9. a) D'après la question 6.b) :

$$\begin{aligned}
P(A\in\mathscr{C}_2(\mathbb{R})) &= P(A\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\cup\mathrm{Vect}(I_2,J))\\
&= P(A\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) + P(A\in\mathrm{Vect}(I_2,J)) - P(A\in\underbrace{\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\cap\mathrm{Vect}(I_2,J)}_{\mathrm{Vect}(I_2)})\\
&= \frac{1}{3} + P([X_1=X_4]\cap[X_2=-X_3]) - P([X_1=X_4]\cap[X_2=0]\cap[X_3=0])\\
&= \frac{1}{3} + P(X_1=X_4)P(X_2=-X_3) - P(X_1=X_4)P(X_2=0)P(X_3=0) \text{ indépendance}
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire à celui de la question 8.a), on a $P(X_1=X_4)=\dfrac{1}{3}$ et on a vu dans la question 8.b) que $P(X_2=-X_3)=\dfrac{1}{3}$.

Donc $P(A\in\mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{27}$.

On a bien $\boxed{P(A\in\mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{11}{27}.}$

b) On peut commencer par remarquer que $P_{[\det(A)=0]}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{P([\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})])}{P(\det(A)=0)}$.

De plus, d'après la question 6.b :

$$[\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})] = \Big([\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]\Big) \cup \Big([\det(A)=0] \cap [A \in vect(I_2, J)]\Big).$$

On remarque alors que $[\det(A)=0] \cap [A \in vect(I_2, J)] = [A=0] \subset [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]$.
Donc

$$[\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})] = [\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
P([\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})]) &= P([\det(A)=0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]) \\
&= P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) \times P_{[A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]}(\det(A)=0) \\
&= \frac{1}{3} \times P(X_1X_4 - X_3^2 = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \Big(P([X_1X_4 = 1] \cap [X_3^2 = 1] \cup [X_1X_4 = 0] \cap [X_3^2 = 0])\Big) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{P_{[\det(A)=0]}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{1/9}{11/27} = \dfrac{3}{11}.}$