

Problème 1

Partie A : Une situation faisant intervenir une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. D'après les valeurs données dans l'énoncé :

- À partir de l'état E_1 , la probabilité de rester à l'état E_1 est $a_{1,1}(1) = p$, la probabilité de passer à l'état E_2 est $a_{2,1}(1) = q$ et la probabilité de passer à l'état E_3 est nulle ($a_{3,1}(1) = 0$). Ces valeurs sont cohérentes car $a_{1,1}(1) + a_{2,1}(1) + a_{3,1}(1) = 1$.
- À partir de l'état E_2 , la probabilité de passer à l'état E_1 est nulle, la probabilité de rester à l'état E_2 est p et la probabilité de passer à l'état E_3 est q . Des valeurs de nouveau cohérentes.
- À partir de l'état E_3 , la probabilité de passer à l'état E_1 est nulle, la probabilité de passer à l'état E_2 est nulle et la probabilité de rester à l'état E_3 est égale à 1. Encore une fois les valeurs sont cohérentes.

2. a) Dans cette question on cherche à calculer $P_{A_0}(A_3)$

La seule succession d'états possibles est E_1, E_1, E_1 . Donc, à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(U) = P_{A_0}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P_{A_0}(A_1)P_{A_0 \cap A_1}(A_2)P_{A_0 \cap A_1 \cap A_2}(A_3) = \boxed{p^3}.$$

b) Dans cette question on cherche à calculer $P_{A_0}(C_3)$

Les successions d'états possibles sont E_1, E_2, E_3 ou E_2, E_2, E_3 ou E_2, E_3, E_3 . Donc :

$$\begin{aligned} P_{A_0}(T) &= P_{A_0}((A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap C_2 \cap C_3)) \\ &= P_{A_0}(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + P_{A_0}(B_1 \cap B_2 \cap C_3) + P_{A_0}(B_1 \cap C_2 \cap C_3) \text{ car union d'évt incompatibles} \\ &= P_{A_0}(A_1)P_{A_0 \cap A_1}(B_2)P_{A_0 \cap A_1 \cap B_2}(C_3) + P_{A_0}(B_1)P_{A_0 \cap B_1}(B_2)P_{A_0 \cap B_1 \cap B_2}(C_3) \\ &\quad + P_{A_0}(B_1)P_{A_0 \cap B_1}(C_2)P_{A_0 \cap B_1 \cap C_2}(C_3) \quad \text{formule des proba composées} \\ &= pq^2 + pq^2 + q^2 = \boxed{q^2(2p+1)}. \end{aligned}$$

c) Notons V l'événement « le système est dans l'état E_3 en exactement de trois heures ».

Les successions d'états possibles sont E_1, E_2, E_3 ou E_2, E_2, E_3 . D'où $V = (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap C_3)$.

Toujours avec les mêmes arguments on a donc

$$P_{A_0}(V) = P_{A_0}(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + P_{A_0}(B_1 \cap B_2 \cap C_3) = \boxed{2pq^2}.$$

3. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. (A_k, B_k, C_k) forme un système complet d'événements et donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{k+1} = P(A_{k+1}) &= P_{A_k}(A_{k+1})P(A_k) + P_{B_k}(A_{k+1})P(B_k) + P_{C_k}(A_{k+1})P(C_k) \\ &= pu_k + 0v_k + 0w_k \\ &= pu_k \end{aligned}$$

b) De même

$$P(B_{k+1}) = P_{A_k}(B_{k+1})P(A_k) + P_{B_k}(B_{k+1})P(B_k) + P_{C_k}(B_{k+1})P(C_k) = qu_k + pv_k + 0w_k,$$

et

$$P(C_{k+1}) = P_{A_k}(C_{k+1})P(A_k) + P_{B_k}(C_{k+1})P(B_k) + P_{C_k}(C_{k+1})P(C_k) = 0u_k + qv_k + w_k.$$

D'où

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(k) : \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ est vraie.

- Comme $A^0 = I_3$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée.

D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A \times A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

- d) Si le système est dans l'état E_1 à l'instant initial, cela signifie que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On a alors $A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(k) \\ a_{2,1}(k) \\ a_{3,1}(k) \end{pmatrix}.$

Donc $a_{1,1}(k)$ est la probabilité d'être à l'état E_1 au bout de k heures sachant qu'à l'instant initial le système est à l'état E_1 , $a_{2,1}(k)$ est la probabilité d'être à l'état E_2 au bout de k heures sachant qu'à l'instant initial le système est à l'état E_1 , et $a_{3,1}(k)$ est la probabilité d'être à l'état E_3 au bout de k heures sachant qu'à l'instant initial le système est à l'état E_1 .

En réalisant le même raisonnement en supposant qu'à l'instant initial on est dans l'état E_2 ou E_3 , on peut généraliser et dire que $a_{i,j}(k)$ est la probabilité d'être à l'état E_i au bout de k heures sachant qu'à l'instant initial le système est à l'état E_j .

Partie B : Puissances de matrices

4. Par définition de la notion de matrice associée à un endomorphisme, on peut affirmer, grâce à la troisième colonne de la matrice L que :

$$u(e_3) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 = e_3.$$

5. a) Par définition, $\ker(u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / u(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$

On remarque alors que

$$u(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y, z)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}((0, 0, 0)) \Leftrightarrow L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Donc $\ker(u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$

- b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \ker(u) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)) = \text{Vect}((-1, 0, 1), (0, -1, 1)). \end{aligned}$$

La famille $((-1, 0, 1), (0, -1, 1))$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires et elle est génératrice de $\ker(u)$. Ainsi $((-1, 0, 1), (0, -1, 1))$ est une base de $\ker(u)$.

- c) D'après la question précédente, $\dim(\ker(u)) = 2.$

u étant une application linéaire et $\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, d'après le théorème du rang on :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u) \Leftrightarrow 3 = 2 + \text{rg}(u).$$

On a donc $\text{rg}(u) = 1.$

6. a) Il existe plusieurs méthodes pour répondre à cette question. Ici nous allons montrer que la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.

Comme $f_1 = -e_1 + e_3$ et $f_2 = -e_2 + e_3$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Cette matrice est clairement inversible car c'est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale.

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3.$

b) La matrice de passage est tout simplement la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Donc, d'après la question précédente,
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) On remarque que f_1 et f_2 sont des éléments de $\ker(u)$. De plus on a déjà calculé $u(e_3)$. En résumé on a donc :

$$\begin{aligned} u(f_1) &= 0f_1 + 0f_2 + 0e_3 \\ u(f_2) &= 0f_1 + 0f_2 + 0e_3 \\ u(e_3) &= 0f_1 + 0f_2 + 1e_3 \end{aligned}$$

Donc
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(k) : L^k = PD^kP^{-1}$ est vraie.

— D'une part, $L^1 = L$ et d'autre part $PD^1P^{-1} = PDP^{-1}$. Or L et D sont les matrices associées au même endomorphisme u mais dans deux bases différentes. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, on sait donc que $L = PDP^{-1}$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

On a alors $L^{k+1} = L^k \times L = PD^kP^{-1} \times PDP^{-1}$, d'après $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(1)$.

Ainsi, $L^{k+1} = PD^kI_3DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$. $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $L^k = PD^kP^{-1}$.

7. a) On remarque que $B = qL + pI_3 = qPDP^{-1} + pI_3 = P(pI_3 + qD)P^{-1}$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} -x & = a \\ -y & = b \\ x + y + z & = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -a \\ y & = -b \\ z & = c + a + b \end{cases}.$$

D'où
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Par la même récurrence que dans la question 6.d), on montre que $B^k = P(pI_3 + qD)^kP^{-1}$.

Or $(pI_3 + qD)^k = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Donc $B^k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 1 - p^k & 1 - p^k & 1 \end{pmatrix}.$

En conclusion :
$$B^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 1 - p^k & 1 - p^k & 1 \end{pmatrix}.$$

d) On trouve $C^2 = 0$ et $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ pq & 0 & 0 \\ q^2 - q & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ pq & 0 & 0 \\ -pq & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Or $q^2 - q = q(q - 1) = -pq$ donc
$$BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ pq & 0 & 0 \\ -pq & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) On voit que $A = B + C$ et comme B et C commutent, on peut appliquer la formule du binôme. On a donc pour $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} C^i B^{k-i}.$$

Comme $C^i = 0$ pour $i \geq 2$, on a donc

$$A^k = \binom{k}{0} C^0 B^k + \binom{k}{1} C B^{k-1}.$$

D'où $A^k = B^k + kCB^{k-1}$. On remarque que la formule trouvée est encore valable pour $k = 0$. Donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k = B^k + kCB^{k-1}.}$$

f) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k + 1 & -p^k + 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & p^{k-1} & 0 \\ -p^{k-1} + 1 & -p^{k-1} + 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k + 1 & -p^k + 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ qp^{k-1} & 0 & 0 \\ -qp^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ 1 - p^k - kqp^{k-1} & -p^k + 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie C : Calcul d'une espérance

8. La série $\sum_{k \geq 2} k(k-1)p^{k-2}$ est une série géométrique dérivée seconde de raison $p \in]-1, 1[$.

$$\text{Donc } \sum_{k \geq 2} k(k-1)p^{k-2} \text{ est convergente et } \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{2}{(1-p)^3} = \frac{2}{q^3}.$$

9. a) Dans cette question on reprend les notations de la partie A.

$P(X = 0) = 0$, car le système est dans l'état E_1 à l'instant initial.

$P(X = 1) = P_{A_0}(C_1) = 0$, d'après l'énoncé.

$P(X = 2) = P_{A_0}(B_1 \cap C_2) = P_{A_0}(B_1)P_{A_0 \cap B_1}(C_2) = q^2$.

b) L'astuce est ici de remarquer que $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$, car $[X \leq k] = [X \leq k-1] \cup [X = k]$ et que les événements $[X \leq k-1]$ et $[X = k]$ sont incompatibles.

De plus, dans cette question, l'événement $(X \leq k)$ est l'événement « le système est dans l'état E_3 au bout de k heures (au plus) sachant que le système était dans l'état E_1 à l'instant initial ». Cet événement est de probabilité $a_{3,1}(k)$, comme expliqué dans la question 3.d).

On a donc

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = a_{3,1}(k) - a_{3,1}(k-1).$$

Or d'après la question 7.f), $a_{3,1}(k) = 1 - p^k - kqp^{k-1} = x_k$.

$$\text{Donc } \boxed{\forall k \geq 1, P(X = k) = x_k - x_{k-1}}.$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$x_k - x_{k-1} = (1 - p^k - kqp^{k-1}) - (1 - p^{k-1} - (k-1)qp^{k-2}) = p^{k-1}(1-p) + (k-1)qp^{k-2}(1-p) - qp^{k-1}$$

Donc

$$x_k - x_{k-1} = (k-1)q^2p^{k-2}$$

d'où $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ converge absolument. La variable aléatoire X admet donc une espérance et

$$E(X) = q^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{2q^2}{q^3} = \frac{2}{q}.$$

D'où $E(X) = \frac{2}{q}$.

Problème 2

Partie A : Étude de l'application f

1. a) — Soient R et L deux polynômes de E et a et b deux réels. On a :

$$\begin{aligned} f(aR + bL) &= [(X^2 - X)(aR + bL)]'' \\ &= [a(X^2 - X)R + b(X^2 - X)L]'' \\ &= a[(X^2 - X)R]'' + b[(X^2 - X)L]'' \\ &= af(R) + bf(L) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

- De plus si P appartient à E , alors $(X^2 - X)P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 donc sa dérivée seconde est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Donc $f(P) \in E$.

f est une application linéaire de E dans E donc f est un endomorphisme de E .

b)

$$\begin{aligned} f(P_0) &= [(X^2 - X)P_0]'' = 2 = 2P_0 + 0P_1 + 0P_2 \\ f(P_1) &= [(X^2 - X)P_1]'' = 6X - 2 = -2P_0 + 6P_1 + 0P_2 \\ f(P_2) &= [(X^2 - X)P_2]'' = 12X^2 - 6x = 0P_0 - 6P_1 + 12P_2 \end{aligned}$$

- c) Pour construire la matrice A il suffit de mettre dans chaque colonne les coordonnées des $f(P_i)$ dans la base

$\mathcal{B}$. D'après la question précédente on a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- d) La matrice A est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale donc A est inversible. Comme A est la matrice associée à f , on peut en déduire que f est bijectif.

Donc f est un endomorphisme bijectif de E .

2. $f - \text{id}_E$ n'est pas bijectif est équivalent à dire que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

Or $\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 12-\lambda \end{pmatrix} \right)$.

Cette matrice étant déjà échelonnée, on peut affirmer que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 6$ ou $\lambda = 12$.

$f - \text{id}_E$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 6$ ou $\lambda = 12$.

3. a) $E_2 = \{P \in E / f(P) - 2P = 0\} = \{P \in E / f(P) = 2P\}$. Un polynôme P quelconque de E s'écrit : $P = a + bX + cX^2$. Donc

$$f(P) = 2P \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a - 2b \\ 6b - 6c \\ 12c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 0 \\ 4b - 6c = 0 \\ 10c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $E_2 = \{P = a/a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(P_0)$. La famille (P_0) est génératrice de E_2 et libre car formée d'un seul vecteur non nul, donc P_0 est une base de E_2 .

- b) Le polynôme $Q_0 = P_0$ répond bien à la question.

4. a) Notons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$AU = 6U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-2y \\ 6y-6z \\ 12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=0 \\ -6z=0 \\ 6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$.

On peut choisir de prendre $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) On remarque que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q_1) = U_0$. Or on a vu que $AU_0 = 6U_0$.

On peut donc affirmer que $f(Q_1) = 6Q_1$.

5. a) Notons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$AV = 12V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-2y \\ 6y-6z \\ 12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x \\ 12y \\ 12z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-2y=0 \\ -6y-6z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5x \\ z=5x \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ 5x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$.

On peut choisir de prendre $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) On remarque que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q_2) = V_0$. Or on a vu que $AV_0 = 12V_0$.

On peut donc affirmer que $f(Q_2) = 12Q_2$.

6. a) On rappelle que $Q_0 = 1 = P_0$, $Q_1 = 1 - 2X = P_0 - 2P_1$ et $Q_2 = 1 - 5X + 5X^2 = P_0 - 5P_1 + 5P_2$.

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q_0, Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire sans 0 sur la diagonale donc elle est inversible.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une base de E .

b) D'après la question précédente, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Comme $f(Q_0) = 2Q_0$, $f(Q_1) = 6Q_1$ et $f(Q_2) = 12Q_2$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$ est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Comme A et D sont les matrices associées au même endomorphisme dans deux bases différentes et que P est la matrice de passage entre ces deux bases on a, d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, $A = PDP^{-1}$.

d) Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour tout entier n .

— Pour $n = 0$: $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Grâce au principe de récurrence nous avons démontré que pour tout entier n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

Partie B : Notion de sous-espace stable

7. — Le seul élément de $\{0\}$ est le polynôme nul. Or $f(0) = 0$ donc $f(0) \in \{0\}$.

$\{0\}$ est stable par f .

- Pour tout $P \in E$, comme on a montré dans la question 1.a), $f(P) \in E$.

Donc E est stable par f .

8. — On rappelle que $\ker(f) = \{P \in E / f(P) = 0\}$.

Soit $P \in \ker(f)$. On a alors $f(f(P)) = f(0) = 0$ donc $f(P) \in \ker(f)$.

$\ker(f)$ est stable par f .

- On rappelle que $\text{Im}(f) = \{P \in E / \exists Q \in E, P = f(Q)\}$.

Soit $P \in \text{Im}(f)$. Il existe $Q \in E$ tel que $P = f(Q)$.

On a alors $f(P) = f(\underbrace{f(Q)}_{\in E})$ donc $f(P) \in \text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f)$ est stable par f .

9. — $\Rightarrow$: Supposons que F est stable par f .

Comme $R_1 \in F$, par définition de la notion de sous-espace stable, on peut affirmer que $f(R_1) \in F$. De même, on peut affirmer que $f(R_2) \in F$.

- $\Leftarrow$: Supposons que $f(R_1) \in F$ et $f(R_2) \in F$.

Soit $P \in F$. Comme (R_1, R_2) est une base de F , on peut affirmer qu'il existe α et β deux réels tels que $P = \alpha R_1 + \beta R_2$. Comme de plus f est linéaire, on a :

$$f(P) = \alpha f(R_1) + \beta f(R_2).$$

Or F est un sous-espace vectoriel donc $\alpha f(R_1) + \beta f(R_2) \in F$. Ainsi, $f(P) \in F$, ce qui signifie que F est stable par f .

10. La famille (Q_0, Q_1) est génératrice de F et libre car formée de deux polynômes non nuls de degré distincts. Donc (Q_0, Q_1) est une base de F .

On a de plus, $f(Q_0) = 2Q_0 \in F$ et $f(Q_1) = 6Q_1 \in F$. Donc, d'après la question précédente, F est stable par f .

Problème 2 bis

Partie A : Étude d'un exemple

1. Soit $P \in F_1$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(1 + X - X^2)$. On a donc, grâce à la linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(P) &= a(f(1) + f(X) - f(X^2)) \\ &= a(3 + X - X^2 + 1 + X + X^2 - 2 - 2X^2) \quad \text{d'après la matrice } M \\ &= a(2 + 2X - 2X^2) = 2a(1 + X - X^2). \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in F_1$. F_1 est bien stable par f .

2. Soit $P \in F_2$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = a + b(X - X^2)$. On a donc, grâce à la linéarité de f :

$$f(P) = af(1) + b(f(X) - f(X^2)) = a(3 + X - X^2) + b(-1 + X - X^2) = 3a - b + (a + b)(X - X^2).$$

Donc $f(P) \in F_2$. F_2 est bien stable par f .

Partie B : Quelques généralités

3. On sait que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ car f est linéaire. Donc $f(\vec{0}) \in \{\vec{0}\}$. Ce qui signifie que $\{\vec{0}\}$ est stable par f .

De plus, comme f est un endomorphisme de E : $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in E$.

Donc E est bien stable par f .

4. $\Rightarrow$: On suppose ici que F est stable par f . Par définition on a donc

$$\forall \vec{x} \in F, \quad f(\vec{x}) \in F.$$

En appliquant cela aux vecteurs $\vec{u}_k$ on obtient bien $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(\vec{u}_k) \in F$.

$\Leftarrow$: On suppose ici que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(\vec{u}_k) \in F$.

Soit $\vec{x} \in F$ quelconque. Comme $\mathcal{B}_F$ est une base de F , on sait qu'il existe des scalaires $a_1, \dots, a_p$ tels que :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^p a_i \vec{u}_i. \text{ Donc, } f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p a_i f(\vec{u}_i), \text{ car } f \text{ est linéaire.}$$

Enfin, comme F est un espace vectoriel et que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(\vec{u}_k) \in F$, on peut en déduire que $f(\vec{x}) \in F$.

Ainsi F est stable par f .

En conclusion, F est stable par f si, et seulement si, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(\vec{u}_k) \in F$.

5. Dans cette question on a donc $F = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.

D'après la question précédente, F est stable par f si, et seulement si, $f(\vec{u}) \in F$.

Or $f(\vec{u}) \in F \iff f(\vec{u}) \in \text{Vect}(\vec{u}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (f - \text{id}_E)(\vec{u}) = \vec{0}$.

En conclusion, F est stable par f si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \ker(f - \lambda \text{id}_E)$.

Partie C : Étude des plans stable en dimension 3

6. a) On sait déjà par hypothèse que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.

Comme E est de dimension 3, d'après le théorème de la base incomplète,

il existe un vecteur $\vec{u}_3$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .

b) On a donc $Q = P_{\mathcal{U}_E, \mathcal{B}_E}$.

La matrice Q est une matrice de passage entre deux bases donc elle est inversible. Elle ne peut donc pas contenir une ligne de 0 et donc les a, b, c ne sont pas tous nuls.

c) On a ici $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{U}_E}(\vec{x})$.

D'après la formule de changement de base $\text{Mat}_{\mathcal{U}_E}(\vec{x}) = P_{\mathcal{U}_E, \mathcal{B}_E} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$, c'est-à-dire $X' = QX$.

En multipliant la troisième ligne de Q par la colonne X on obtient la troisième coordonnée de X' . On a donc bien : $x'_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3$.

d) Comme $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de F on a :

$$\vec{x} \in F \iff \vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \iff \text{Mat}_{\mathcal{U}_E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff 0 = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

En conclusion, $\vec{x} \in F \iff 0 = ax_1 + bx_2 + cx_3$.

7. a) (i) Comme F est stable par f , on a $f(\vec{u}_1) \in F$ et $f(\vec{u}_2) \in F$.

Donc $f(\vec{u}_1) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2$ et $f(\vec{u}_2) = \beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2$.

Ensuite, comme $f(\vec{u}_3) \in E$, on a $f(\vec{u}_3) = \gamma_1 \vec{u}_1 + \gamma_2 \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3$.

On obtient bien que la matrice de f dans la base $\mathcal{U}_E$ est la matrice B donnée dans l'énoncé.

(ii) D'après la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphisme, on a $B = Q A Q^{-1}$ et donc $BQ = QA$.

En passant à la transposée, on obtient bien $Q^T B^T = A^T Q^T$.

Dans cette égalité on ne conserve que la troisième colonne (il suffit de multiplier par la droite par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). La troisième colonne du produit $A^T Q^T$ est $A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. De plus la troisième colonne du produit

$$Q^T B^T \text{ est } Q^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a \\ \gamma b \\ \gamma c \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc on a bien } A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et donc } A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right).$$

b) (i) On suppose donc que $A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour obtenir $\boxed{(a \ b \ c) \times A = \lambda (a \ b \ c)}$, il suffit de passer à la transposée dans l'égalité ci-dessus.

(ii) D'après notre cours, $Y = AX$. Donc on a :

$$\begin{aligned} (a \ b \ c) \times A = \lambda (a \ b \ c) &\implies (a \ b \ c) \times AX = \lambda (a \ b \ c) X \\ &\implies (a \ b \ c) \times Y = \lambda (a \ b \ c) X \\ &\implies ay_1 + by_2 + cy_3 = \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3) \end{aligned}$$

(iii) Si $\vec{x} \in F$, alors d'après la question 6.d) (sens direct), $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ et donc $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$. Toujours d'après la question 6.d) (sens réciproque), on en déduit que $f(\vec{x}) \in F$.

Donc $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$