Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4

13 janvier 2024

Durée de l'épreuve : 3h

*L'utilisation de la calculatrice, ou de tout autre appareil électronique (téléphone portable, ordinateur...), est **interdite**.*

TOUS les étudiants doivent traiter le problème 1. Vous choisirez ensuite entre le problème 2 et le problème 2 bis.

Merci de bien vouloir indiquer dès le début de votre copie votre choix concernant le deuxième problème.

Problème 1

Dans tout le problème on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On rappelle que pour tout $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, A^0 désigne, par convention, la matrice identité que l'on notera I_3.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_k = (a_{i,j}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. On dit que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ la suite réelle $(a_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté $\ell_{i,j}$. La matrice $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est alors appelée limite de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Dans tout le problème, p désigne un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$.

Dans la partie A du problème, on étudie une situation probabiliste faisant intervenir une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Dans la partie B, on considère des matrices nous permettant de calculer les puissances successives de A. Enfin, dans la dernière partie, on calcule une espérance d'une variable aléatoire discrète. Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie A : Une situation faisant intervenir une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

En cas d'incident et sans intervention d'un technicien, un système électrique se trouve dans un des trois états suivants :

— état E_1 : premier type d'incident non critique.

— état E_2 : second type d'incident non critique.

— état E_3 : incident critique. Le système est définitivement à l'arrêt.

On appelle instant initial l'instant où le système est endommagé. Il se trouve donc dans l'un des 3 états E_1 ou E_2 ou E_3.

Ensuite son état est, à chaque heure, susceptible d'évoluer et de passer d'un état à un autre.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $a_{i,j}(1)$ la probabilité de <u>passer de l'état E_j à l'état E_i</u> au bout d'une heure. Ces probabilités sont :

$$a_{1,1}(1) = a_{2,2}(1) = p \qquad ; \qquad a_{2,1}(1) = a_{3,2}(1) = q \qquad ; \qquad a_{3,3}(1) = 1$$

$$a_{1,2}(1) = a_{1,3}(1) = a_{2,3}(1) = a_{3,1}(1) = 0.$$

On notera A_i (respectivement B_i et C_i) l'événement "le système est dans l'état E_1 (respectivement E_2 et E_3) à l'instant i ".

1. Interpréter ces probabilités pour l'évolution du système. On vérifiera notamment la cohérence de ces données.
2. On suppose **dans cette question uniquement** qu'à l'instant initial le système est dans l'état E_1.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit encore dans l'état E_1 au bout de trois heures ? (*La réponse sera justifiée.*)
   b) Démontrer que la probabilité qu'au bout de trois heures le système soit dans l'état E_3 est égale à $q^2(2p+1)$.
   c) Quelle est la probabilité qu'il passe dans l'état E_3 exactement à l'issue de la troisième heure ? (*La réponse sera justifiée.*)

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note u_k (respectivement v_k et w_k) la probabilité que le système soit dans l'état E_1 (respectivement E_2 et E_3) au bout de k heures.
   a) Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k, v_k et w_k (*la réponse sera soigneusement justifiée*).
   b) En tenant le même raisonnement pour v_{k+1} et w_{k+1}, en déduire que :

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}$$

   c) Exprimer $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ en fonction de A, de k et de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. (*La réponse sera justifiée.*)
   d) On note $A^k = (a_{i,j}(k))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Pour $k = 1$, on peut remarquer que cette notation correspond bien aux valeurs des $a_{i,j}(1)$ définies précédemment.
   On ne cherchera pas à calculer les coefficients $a_{i,j}(k)$ dans cette partie.
   Interpréter alors le coefficient $a_{i,j}(k)$ (pour $k \geqslant 2$ et $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$). Pour cela, on pourra envisager les différentes possibilités pour l'état du système à l'instant initial.

Partie B : Puissances de matrices

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice relative à la base $\mathscr{B}$ est la matrice ci-dessous :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer $u(e_3)$.
5. a) Démontrer que $\ker(u) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
   b) Déterminer une base de $\ker(u)$ formée de vecteurs dont la dernière coordonnée dans la base canonique est égale à 1. On notera $\mathscr{B}_1$ cette base.
   c) Déterminer rg (u). (*La réponse sera justifiée.*)
6. a) Démontrer que la famille $\mathscr{C} = (f_1, f_2, e_3)$, où $f_1 = (-1, 0, 1)$ et $f_2 = (0, -1, 1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Expliciter la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. On notera P cette matrice.
   c) Expliciter la matrice D de l'endomorphisme u relative à la base $\mathscr{C}$. (*La réponse sera justifiée.*)
   d) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $L^k = PD^kP^{-1}$.
7. On pose B et C les matrices ci-dessous :

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & q & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer deux réels α et β tels que $B = P(\alpha I_3 + \beta D)P^{-1}$.
   b) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).
   c) En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (*cette matrice sera explicitée*).
   d) Calculer les matrices C^2, BC et CB. On montrera que $BC = CB$.
   e) A désignant toujours la matrice introduite en partie A, déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = B^k + kB^{k-1}C$$

   f) Expliciter alors la matrice A^k.

Partie C : Calcul d'une espérance

On rappelle que p désigne un réel de $]0,1[$ et que $q = 1 - p$.

8. Sans justification, rappeler la nature de la série $\sum_{k \geqslant 2} k(k-1)p^{k-2}$ et en donner sa somme.
9. On suppose à nouveau dans cette dernière question que le système est dans l'état E_1 à l'instant initial et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre exact d'heure(s) pour que le système atteigne l'état E_3 pour la première fois.
   a) Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   b) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = 1 - p^k - kqp^{k-1}$. Justifier que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = x_k - x_{k-1}.$$
   c) En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Problème 2 (niveau Agro-G2E)

On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On note P_0, P_1, P_2 les polynômes définis par

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad P_2 = X^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E.

Soit f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde du polynôme $(X^2 - X)P$.

Partie A : Étude de l'application f

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   b) Déterminer $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2.
   c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$
   d) Montrer sans calcul que f est un endomorphisme bijectif de E.
2. Déterminer tous les réels λ tels que $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif.
3. a) Déterminer une base de $E_2 = \ker(f - 2\mathrm{id}_E)$.
   b) Déterminer un polynôme Q_0 appartenant à E_2 et dont le coefficient constant est égal à 1.
4. a) Résoudre l'équation $AU = 6U$ d'inconnue $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Donner ensuite une solution U_0 de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$.
   b) On pose $Q_1 = 1 - 2X$. Avec le moins de calculs possible et en utilisant la question précédente, donner la valeur de $f(Q_1)$.
5. a) Résoudre l'équation $AV = 12V$ d'inconnue $V \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Donner ensuite une solution V_0 de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$.
   b) On pose $Q_2 = 1 - 5X + 5X^2$. Avec le moins de calculs possible et en utilisant la question précédente, donner la valeur de $f(Q_2)$.
6. a) Montrer que $\mathscr{C} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de E.

b) Expliciter la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. On notera P cette matrice.

c) Montrer, sans calculs, que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.

Partie B : Notion de sous-espace stable

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est **stable par f** si, et seulement si :

$$\forall P \in F, \qquad f(P) \in F.$$

7. Montrer que $\{0\}$ et E sont stables par f.
8. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.
9. On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et que (R_1, R_2) est une base de F.
   Montrer que : $\qquad F$ est stable par $f \iff f(R_1) \in F$ et $f(R_2) \in F$.
10. En reprenant les notations de la partie A, montrer que $F = \mathrm{Vect}(Q_0, Q_1)$ est stable par f.

Problème 2 bis (niveau ENS)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

On dit que F est **stable par f** si, et seulement si :

$$\forall \vec{x} \in F, \qquad f(\vec{x}) \in F.$$

Partie A : Étude d'un exemple

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que sa matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ soit la matrice notée M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $F_1 = \mathrm{Vect}(1 + X - X^2)$ est stable par f.
2. Montrer que $F_2 = \mathrm{Vect}(1, X - X^2)$ est stable par f.

Partie B : Quelques généralités

3. Sous-espaces vectoriels triviaux stables par f.
   Montrer que $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$ stables par f.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{\vec{0}\}$ et de dimension finie. Notons p la dimension de F et introduisons $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une base de F.
   Montrer que F est stable par f si, et seulement si : $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $f(\overrightarrow{u_k}) \in F$.
5. Droites vectorielles stables par f.
   Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ de dimension 1 et introduisons $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{u})$ une base de F.
   Montrer que F est stable par f si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Partie C : Étude des plans stables en dimension 3

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B}_E=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ une base de E, f un endomorphisme de E et notons A sa matrice dans la base $\mathscr{B}_E$, F un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ de dimension 2.

6. Mise en place de l'équation de F dans la base $\mathscr{B}_E$.
   Soit $\mathscr{B}_F=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ une base de F.
   a) Justifier l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{u_3}$ de E tel que la famille $\mathscr{U}_E=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ soit une base de E.
   b) Introduisons alors la matrice de passage Q de la base $\mathscr{U}_E$ à la base $\mathscr{B}_E$ (c'est-à-dire la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ exprimés dans $\mathscr{U}_E$) que nous noterons :
   $$Q=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a & b & c\end{pmatrix}.$$
   Montrer que a, b et c sont non tous nuls.
   c) Soit $\vec{x}$ appartenant à E, notons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}_E$ et $X'=\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{U}_E$.
   Rappeler le lien matriciel entre Q, X et X', et en déduire que $x'_3=ax_1+bx_2+cx_3$.
   d) En déduire que pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E de composantes (x_1,x_2,x_3) dans la base $\mathscr{B}_E$:
   $$\vec{x}\in F \quad\Longleftrightarrow\quad ax_1+bx_2+cx_3=0.$$
   La condition $ax_1+bx_2+cx_3=0$ est appelée **l'équation de F dans la base $\mathscr{B}_E$**, nous admettrons qu'elle est indépendante du choix de la base $\mathscr{U}_E$.
7. Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f.
   a) Dans cette question, nous supposons F stable par f.
      (i) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{U}_E$, matrice que nous noterons B dans la suite, est de la forme :
      $$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix},\ (\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma)\in\mathbb{R}^7.$$
      On ne cherchera pas à déterminer ces 7 coefficients.
      (ii) Après avoir justifié que : $Q^T\ B^T=A^T\ Q^T$, démontrer que $A^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$.
   b) Réciproquement, supposons que $A^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ fixé.
      (i) Justifier l'égalité matricielle $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\times A=\lambda\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$.
      (ii) Soit $\vec{x}$ appartenant à E, notons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}_E$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathscr{B}_E$.
      Montrer que $ay_1+by_2+cy_3=\lambda(ax_1+bx_2+cx_3)$.
      (iii) En déduire que F est stable par f.