

MATHÉMATIQUES Méthodes de calcul et raisonnement Durée : 2 heures 30 minutes

Réponses

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet. Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

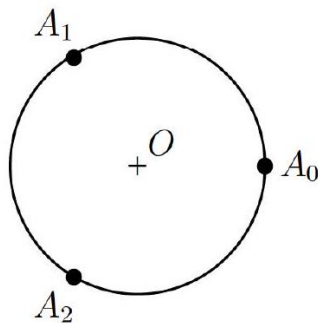
Ce problème est constitué de trois parties. Dans la partie I, on démontre des résultats qui pourront être utilisés dans la partie II. La partie III est indépendante des deux autres

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère un repère orthonormal du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le cercle unité $\mathcal{C}$ sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants $A_0, \dots, A_{p-1}$ tels que A_0 soit d'affixe 1.

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, A_k est le point d'affixe $z_k = e^{2ik\pi/p}$.

Pour $p = 3$, on a la représentation suivante :



I Résultats préliminaires

1. On considère la matrice $D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$

(a) Inverser les matrices D_3 et D_4 .

RÉPONSE:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 D_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= a \\ z &= b \\ x &= c \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x &= c \\ y &= a \\ z &= b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$D_3 \text{ est inversible et son inverse est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De même on trouve

$$D_4 \text{ est inversible et son inverse est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*

- (b) Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse. On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p .

RÉPONSE:

Méthode 1 On résout un système avec des trois points

$$D_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Méthode 1 On pose ¹

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$D_p C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette opération consiste à former une matrice en prenant la dernière colonne de D_p , la première colonne de D_p , la deuxième colonne C_p ...

$$D_p C_p = I_p$$

Comme les matrices sont carrées

$$D_p \text{ est inversible et son inverse } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 3 La fonction canoniquement associée est la permutation circulaire vers la droite

$$\begin{aligned} : \quad \mathbb{C}^p &\rightarrow \mathbb{C}^p \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto (x_p, x_1, \dots, x_{p-1}) \end{aligned}$$

qui est bijective et donc la bijection réciproque est la permutation circulaire vers la gauche La fonction canoniquement associée est la permutation circulaire vers la droite

$$\begin{aligned} : \quad \mathbb{C}^p &\rightarrow \mathbb{C}^p \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto (x_2, x_2, \dots, x_p, x_1) \end{aligned}$$

donc la matrice est C_p .

1. Le rapport du jury qu'il ne faut pas noter cette matrice D_p^{-1} avant d'avoir démontré que c'est bien l'inverse de D_p

$$D_p \text{ est inversible et son inverse } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*

2. Soit $f: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^p x_k.$

(a) Prouver que f est une application $\mathbb{C}$ -linéaire.

RÉPONSE:

Soit λ un complexe² et $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x_1 + x'_1, \dots, \lambda x_p + x'_p) \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^p \lambda x_i + x'_i \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\lambda \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p x'_i \right) \\ &= \lambda \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x'_i \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

f est bien $\mathbb{C}$ linéaire

*

(b) La fonction f est-elle injective?

RÉPONSE:

Méthode 1 La fonction ne peut pas être injective car la dimension de l'espace de départ est p est celle de l'ensemble d'arrivée est 1. Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = p$$

2. Le rapport de jury reproche à certains étudiants d'avoir choisis les scalaires dans $\mathbb{R}$

Comme $\dim \operatorname{Im} f \subset \mathbb{C}$ on a $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$

$$\dim \operatorname{Ker} f \geq p - 1$$

, ce qui démontre

f n'est pas injective.

Méthode 2 On calcule le noyau (pas une base, mais une expression sous forme d'équation cartésienne) et on constate que ce noyau n'est pas réduit $\{0\}$

Méthode 3 On constate que $f(1, -1, 0, \dots, 0) = 0$

*

(c) La fonction f est-elle surjective?

RÉPONSE:

Remarque : Rapport du jury « La définition de la surjectivité est globalement connue mais sa démonstration est souvent une paraphrase : "il est évident que tout complexe peut s'écrire comme la somme de p complexes". Un exemple d'antécédent était attendu. »

On constate que $f(1, 1, 1, \dots, 1) = 1$ ce qui démontre que $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$, donc comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{C}$

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$$

f est surjective

*

(d) Déterminer la dimension du noyau de f .

RÉPONSE:

En utilisant le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Ker} f = p.$$

*

3. Calculez $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k$. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{k2\pi/p} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{2\pi/p} \right)^k \\
&= \frac{1}{p} \frac{1 - e^{p2\pi/p}}{1 - e^{2\pi/p}} && \text{car } e^{2\pi/p} \neq 1 \\
&= \frac{1}{p} \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi/p}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k = 0}$$

Le centre de gravité de la figure est l'origine

*

4. Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{2ik\pi/p}$.

On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

RÉPONSE:

On pose $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$z^p = 1 \Leftrightarrow \rho^p e^{i\theta p} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^p = 1 \\ p\theta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{égalité module à deux } \pi \text{ près}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{p} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{car } \rho > 0$$

$$\boxed{z^p = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{2ik\pi/p} .}$$

*

On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$.

II Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$. Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n} . La variable aléatoire U_0 est donc constante à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité $1/2$ et à $p-1$ avec une probabilité $1/2$. La variable U_2 est à valeurs dans $\{2, 0, p-2\}$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2) = \mathbb{P}(U_2 = p-2) = 1/4$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on note } X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer une matrice $M_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier n , on ait

$$X_{n+1} = M_p X_n$$

Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$ ($\{U_n = k\}_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements³, donc pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$

$$P(U_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{p-1} P(U_n = k) P_{U_n=k}(U_{n+1} = i)$$

Comme le mobile ne peut se déplacer que d'une position à chaque étape seules deux probabilités conditionnelles ne sont pas nulles. Mais il faut⁴ distinguer les positions des bords de l'intervalle $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ de celle du centre.

cas $i \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$

$$P(U_{n+1} = i) = \frac{1}{2} P(U_n = i-1) + \frac{1}{2} P(U_n = i+1)$$

cas $i = 0$

$$P(U_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} P(U_n = p-1) + \frac{1}{2} P(U_n = 1)$$

cas $i = p-1$

$$P(U_{n+1} = p-1) = \frac{1}{2} P(U_n = p-2) + \frac{1}{2} P(U_n = 0)$$

On trouve donc

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$$

3. Le rapport de jury indique bien qu'il faut préciser le SCE

4. cf rapport de jury

$$M_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$$

*

6. Soit n un entier. Donner sans justifications l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n .
RÉPONSE:

On peut montrer que pour $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = M_p^n X_0$$

$$\text{Pour } n \text{ entier naturel } X_n = M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

X_n est la première colonne de M_p .

*

7. Vérifier que $M_p = \frac{1}{2} (D_p + D_p^{-1})$.

RÉPONSE:

Comme on a donné l'expression de D_p^{-1} c'est évident.

*

8. On suppose ici que $p = 3$ et on admet que $M_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Prouver que la matrice M_3 est diagonalisable et donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $M_3 = PDP^{-1}$.

RÉPONSE:

Remarque : Si on utilise « la matrice est symétrique **réelle** donc diagonalisable », le rapport de jury précise bien qu'il faut préciser **réelle**. Mais ici comme il faut diagonaliser la matrice cette remarque n'est pas très utile, et peut vous faire perdre des points si vous oubliez **réelle**.

Détermination du spectre. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M_3 si et seulement si $M_3 - \lambda I_3$ n'est pas inversible et $M_3 - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\text{rg}(M_3 - \lambda I_3) < 3$

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(M_3 - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 1 + 2\lambda & 1 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2\lambda L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda - 4\lambda^2 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2
 \end{aligned}$$

Le rang n'est pas égal à 3 si et seulement si l'un des pivots est nul $1 + 2\lambda = 0$ ou $2 + 2\lambda - 4\lambda^2 = 0$.

$$\text{Sp}(M_3) = \left\{ 1, -\frac{1}{2} \right\}.$$

Détermination des sous-espaces propres. Après calculs on trouve

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-1/2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ces familles sont des bases de leur sous espaces propres respectives, car pour la première constituée d'un vecteur non nul et pour la deuxième constituée de deux vecteurs non colinéaires. On trouve donc

$$\dim E_1 + \dim E_{-1/2} = 3$$

M_3 est diagonalisable.

$$M_3 = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*

(b) Déterminer P^{-1} .

RÉPONSE:

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*

(c) Soit $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez le résultat obtenu.

RÉPONSE:

Remarque : Le rapport de jury précise « Comme cela a déjà été précisé [dans les rapports précédents], le résultat $M = PD^n P^{-1}$ a besoin d'être prouvé soit par récurrence soit en utilisant la formule de changement de bases. »

Soit $n \in \mathbb{N}$, D'après la question précédente $M = PDP^{-1}$, Si on note $\mathcal{B}$ la base de vecteurs propres trouvée précédemment, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et h l'endomorphisme canoniquement associé à M alors :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(h) \quad D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)$$

D'après le cours

$$M^n = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(h^n) \quad D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h^n)$$

donc d'après la formule de changement de base

Pour $n \in \mathbb{N}$ $M^n = PD^n P^{-1}$

On sait donc que, pour $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = M^n X_0$$

question 6

$$\begin{aligned} &= PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} PD^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puissance de matrice diagonale

Remarque : Le rapport de jury précise « La somme des probabilités obtenues devait faire 1, il est bon de faire une remarque lorsque ce n'est pas le cas »

Comme $\left| -\frac{1}{2} \right| \in]-1; 1[$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n = k) = \frac{1}{3}$

Remarque : Le rapport de jury précise « Les passages à la limite dans les matrices sont hors programme donc ne peuvent pas être utilisés » On ne peut donc pas passer à la limite pour D^n , puis calculer le produit

Quand n devient grand le mobile a autant de chance d'être sur chacune des positions.

*

9. Déterminer les valeurs propres complexes de D_p et les espaces propres associés.

RÉPONSE:

Méthode 1 Conjecture sur les valeurs propres et des sous espaces propres En regardant la question suivantes on devine⁵ que les valeurs propres sont les z_i pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$

5. Le rapport de jury ne le reproche pas « Le spectre est souvent pressenti surtout qu'il apparaît dans la question suivante. Un petit nombre de candidats l'obtienne par opérations élémentaires successives. »

Soit $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$

$$D_p X = z_i X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_0 \end{pmatrix} = z_i \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= z_i x_0 \\ x_2 &= z_i x_1 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{p-1} &= z_i x_{p-2} \\ x_0 &= z_i x_{p-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= z_i x_0 \\ x_2 &= z_i x_1 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{p-1} &= z_i x_{p-2} \\ x_0 &= z_i^p x_0 \end{cases}$$

substitutions successives

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= z_i x_0 \\ x_2 &= z_i^2 x_0 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{p-1} &= z_i x_{p-2} \\ x_0 &= 1 x_0 \end{cases}$$

car $z_i^p = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= z_i x_0 \\ x_2 &= z_i^2 x_0 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{p-1} &= z_i x_{p-2} \end{cases}$$

On trouve donc qu'il existe des solutions non nulles à cette équation

$$\text{Pour } i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \text{ } z_i \text{ est valeur propre et } E_{z_i} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ \vdots \\ z_i^{p-1} \end{pmatrix} \right)$$

Comme on a trouvé p valeurs propres **distinctes** pour une matrice d'ordre p , il n'en existe pas d'autre.

$$D_p \text{ est diagonalisable et son spectre est } \left\{ e^{i2k\pi/p} / k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \right\}.$$

Méthode 2 : calculs des valeurs propres par opérations On commence par constater que comme D_p est inversible, 0 n'est pas valeur propre de D_p .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ **non nul**, c'est important car cela va justifier que les opérations sur les lignes qui suivent sont bien des opérations élémentaires qui conserve le rang, en dépit d leur forme un peu particulière. Comme

précédemment nous devons déterminer le rang de $D_p - \lambda I_p$

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(D_p - \lambda I_p) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix} & L_p \leftarrow \lambda L_p + L_1 \text{ autorisé car } \lambda \neq 0 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda^3 \end{pmatrix} & L_p \leftarrow \lambda L_p + L_2 \text{ autorisé car } \lambda \neq 0 \\
 &\vdots \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & -\lambda^{p-1} \end{pmatrix} & \text{on a fait } p-2 \text{ opérations} \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda^{p-1} \end{pmatrix} & L_p \leftarrow \lambda L_p + L_{p-1} \text{ autorisé car } \lambda \neq 0
 \end{aligned}$$

Comme λ est non nul, le rang de $D_p - \lambda I_p$ n'est pas égal à p si et seulement si le dernier pivot est nul si et seulement si $\lambda^p = 1$

Le spectre de D_p est $\left\{ e^{i2k\pi/p} / k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \right\}$

On sait alors que D_p est diagonalisable et on peut alors calculer les sous-espaces propres comme précédemment.

Méthode 3, plus astucieuse On a vu que D_p est la matrice de la permutation circulaire vers la droite, donc

$$D_p^p = I_p$$

Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre non nul associé. ON a alors

$$D_p X = \lambda X$$

et donc par une récurrence immédiate

$$D_p^p X = \lambda^p X$$

ce qui donne

$$X = \lambda^p X$$

Comme X est non nul

$$\lambda^p = 1$$

Le spectre de D_p est inclus $\left\{ e^{i2k\pi/p} / k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \right\}$

Le calcul des sous espaces propres permet alors de justifier que ces complexes sont bien des valeurs propres. (cf méthode 1).

*

10. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ inversible tel que

$$D_p = Q \begin{pmatrix} z_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & z_{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, le sous-espace propre de D_p associé à la valeur propre z_k est inclus dans le noyau de f .

RÉPONSE:

On a trouvé p valeurs propres **distinctes**⁶ pour une matrice d'ordre⁷ p elle est diagonalisable.

Soit $\ell \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$

On a vu qu'une base⁸ de E_{z_ℓ} est

$$\begin{pmatrix} z_\ell \\ z_\ell^2 \\ \vdots \\ z_\ell^{p-1} \end{pmatrix}$$

6. Le rapport reproche l'omission de cet adjectif

7. Le rapport reproche les erreurs de vocabulaire sur ce point

8. car c'est un vecteur générateur non nul

Or comme $z_i \neq 1$

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} z_\ell \\ z_\ell^2 \\ \vdots \\ z_\ell^{p-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} z_\ell^k \\
 &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - z_\ell^p}{1 - z_\ell} \quad \text{car } z_i \neq 1 \\
 &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - \exp(p2i\pi/p)}{1 - z_\ell} \\
 &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - 1}{1 - z_\ell} = 0
 \end{aligned}$$

ce qui démontre que ce vecteur est dans $\text{Ker } f$ et comme c'est une base de E_{z_ℓ}

Pour $\ell \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ E_{z_ℓ} est inclus dans $\text{Ker } f$.

Remarque : Pourquoi de raisonnement ne marche t il pas pour $\ell = 0$ i.e. pour E_1 ?

*

On suppose dans toute la suite du sujet, que p est impair. Il existe donc un entier q non nul tel que $p = 2q + 1$.

11. En déduire, en utilisant la question 7, que la matrice M_p est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

RÉPONSE:

$$D_p = Q \Delta_p Q^{-1}$$

où Q et Δ_p sont les matrices définies à la question 10. Les valeurs propres de D_p étant toutes non nulles D_p est inversible

$$D_p^{-1} = (Q^{-1})^{-1} \Delta_p^{-1} Q^{-1}$$

et donc

$$M_p = \frac{1}{2}(D_p + D_p^{-1}) = Q \left(\frac{1}{2}(\Delta_p + \Delta_p^{-1}) \right) Q^{-1}$$

La matrice Δ_p^{-1} est aussi diagonale, donc $\frac{1}{2}(\Delta_p + \Delta_p^{-1})$ est diagonale⁹.

M_p est diagonalisable.

*

12. Prouver que 1 est valeur propre de M_p et que l'espace propre associé que l'on notera G_0 est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base.

9. Le rapport de jury rappelle que la somme de deux matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable

RÉPONSE:

Notons $\Delta_p = \Delta_{2q+1} = \text{diag}(z_0, z_1, \dots, z_{2q})$ pour désigner la matrice diagonale dont on donne les coefficients. D'après les propriétés des matrices diagonales

$$\Delta_{2q+1}^{-1} = \text{diag}(z_0^{-1}, z_1^{-1}, \dots, z_{2q}^{-1})$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta_{2q+1} + \Delta_{2q+1}^{-1}) &= \text{diag}\left(\frac{z_0 + z_0^{-1}}{2}, \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}, \dots, \frac{z_{2q} + z_{2q}^{-1}}{2}\right) \\ &= \text{diag}\left(1, \frac{\exp(i2\pi/2q+1) + \exp(-i2\pi/2q+1)}{2}, \frac{\exp(i22\pi/2q+1) + \exp(-i22\pi/2q+1)}{2}, \dots, \frac{\exp(i2q2\pi/2q+1) + \exp(-i2q2\pi/2q+1)}{2}\right) \\ &= \text{diag}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{2q+1}\right), \dots, \cos\left(2q\frac{2\pi}{2q+1}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$M_{2q+1} = Q \text{diag}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{2q+1}\right), \dots, \cos\left(2q\frac{2\pi}{2q+1}\right)\right) Q^{-1}$$

On a donc calculer les valeurs propres de M_{2q+1} et des vecteurs propres associés en considérant les colonnes de Q matrice de passage.

Comme pour tout $k \in \llbracket 1, 2q \rrbracket$

$$k\frac{2\pi}{2q+1} \in]0; 2\pi[$$

tous les cosinus sont différents de 1, donc le seul vecteur propre parmi les colonnes de Q associé à la valeur propre 1 est la première colonne de Q

1 est valeur propre de M_p et le sous espace propre associé est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

*

13. Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Prouver que $\cos(2k\pi/p)$ est valeur propre de M_p et que l'espace propre associé, que l'on notera G_k , est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 inclus dans le noyau de f .

RÉPONSE:

On constate que les autres valeurs propres sont

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2q+1}\right), \dots, \cos\left(2q\frac{2\pi}{2q+1}\right)$$

et des vecteurs propres associés sont les colonnes de Q . Mais d'après les propriétés du cosinus

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2\pi - x) = \cos(x)$$

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad \cos\left(k\frac{2\pi}{2q+1}\right) = \cos\left((2q+1-k)\frac{2\pi}{2q+1}\right)$$

Donc chacun des $\cos\left(k\frac{2\pi}{2q+1}\right)$ apparaît deux fois dans la matrice diagonale

Pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ $\cos\left(k \frac{2\pi}{2q+1}\right)$ est valeur propre de M_p et l'espace propre associé est Vect $\left(\begin{pmatrix} z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{2q+1-k} \\ z_{2q+1-k}^2 \\ \vdots \\ z_{2q+1-k}^{p-1} \end{pmatrix} \right)$

Ces deux vecteurs sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres de $\mathbf{D}_p$ distinctes donc forment une famille libre (lemme de concaténation)

La dimension de ce sous-espace propre est 2.

On a vu dans la question 10 que chacun de ces deux vecteurs est dans Ker f , donc

Ce sous-espace propre est inclus dans Ker f .

*

14. Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

(a) Prouver qu'il existe un unique $(V_0, V_1, \dots, V_q) \in G_0 \times G_1 \times \dots \times G_q$ tel que

$$V = \sum_{k=0}^q V_k$$

RÉPONSE:

En considérant la base de vecteur propre de D_p que l'on note $(X_i)_{i \in \llbracket 0, 2q \rrbracket}$, V se décompose de façon unique

$$V = \sum_{i=0}^{2q} \alpha_i X_i$$

et donc

$$V = \alpha X_0 + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i X_i + \alpha_{2q-i} X_{2q-i} \right)$$

et il suffit de poser

$$V_0 = \alpha_0 X_0 \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad V_i = \alpha_i X_i + \alpha_{2q-i} X_{2q-i}$$

On admettra l'unicité.

*

(b) Déterminer V_0 en fonction de $f(V)$ et de p .

RÉPONSE:

$$f(X_0) = p \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad f(V_i) = 0$$

donc

$$f(V) = \alpha_0 p$$

ce qui donne

$$\alpha_0 = \frac{1}{p} f(V)$$

$$V_0 = \frac{1}{p} f(V) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*

15. (a) Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2k\pi/p)^n$.

RÉPONSE:

Comme $2k\pi/p \in]0; 2\pi[\setminus \{-1\}$ tous ces cosinus sont dans *into*—11

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1, q \rrbracket. \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2k\pi/p)^n = 0$$

*

(b) En déduire, pour tout $\ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

On reprend les notations de la question précédente.

Une récurrence montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M_p^n V = V_0 + \sum_{k=1}^q \left(\cos\left(k \frac{2\pi}{p}\right)^n \right) V_k$$

et donc¹⁰ à V fixé

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_p^n V = V_0$$

Prenons $V = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente

$$V_0 = \frac{1}{p} f(X_0) X_0 = \frac{1}{p} \times 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour tout } \ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n = \ell) = \frac{1}{p}.$$

10. On pourrait pour rester dans le programme officiel regarder les limites pour chacune des composantes des matrices colonnes

*

(c) Interprétez le résultat obtenu.

RÉPONSE:

Quand le nombre d'étapes écoulées devient grand, la particule a autant de chance de se retrouver en chacune des positions.

*

III Étude d'une variable aléatoire

16. On considère la fonction cotan qui à un réel x associe $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition D de cotan.

RÉPONSE:

la fonction est définie en tout point x où $\sin x$ est non nul

L'ensemble de définition de cotan est $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque : C'est aussi une union d'intervalle sur lesquels la fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Le rapport de jury relève beaucoup de confusion sur les notations

*

(b) En remarquant que pour tout $x \in D$, on a $\cotan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tracer, sans justifications, son graphe sur $[-2\pi; 2\pi] \cap D$.

RÉPONSE:

Remarque : Le rapport de jury : « L'indication donnée dans la question n'avait pas besoin d'être prouvée » ce qui est une erreur de lecture de l'énoncé ou une erreur de conception de l'énoncé.

Soit $x \in D$ alors

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

On obtient le croube représentative de cotan en faisant subir une symétrie d'axe $x = \pi/4$ à la courbe représentative de tan.

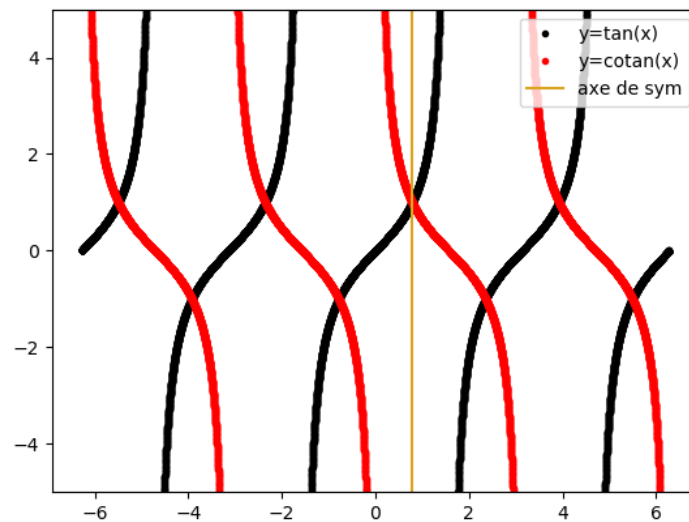
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def cotan(x):
    return 1/np.tan(x)
x=np.arange(-2*np.pi,2*np.pi,0.001)
plt.ylim(-5,5)
plt.plot(x,np.tan(x),'.k',label='y=tan(x)')
```

```
plt.plot(x,cotan(x),'.r',label='y=cotan(x)')
plt.plot([np.pi/4,np.pi/4],[-5,5],color='goldenrod',label='axe de sym')

plt.legend()

plt.show()
```



Remarque : Rapport du jury « Seules 25% des copies ont réussi à tracer le graphe de cotan alors que seule l'allure de la courbe était attendue » c'est à dire que se sont des points facilement gagnés.

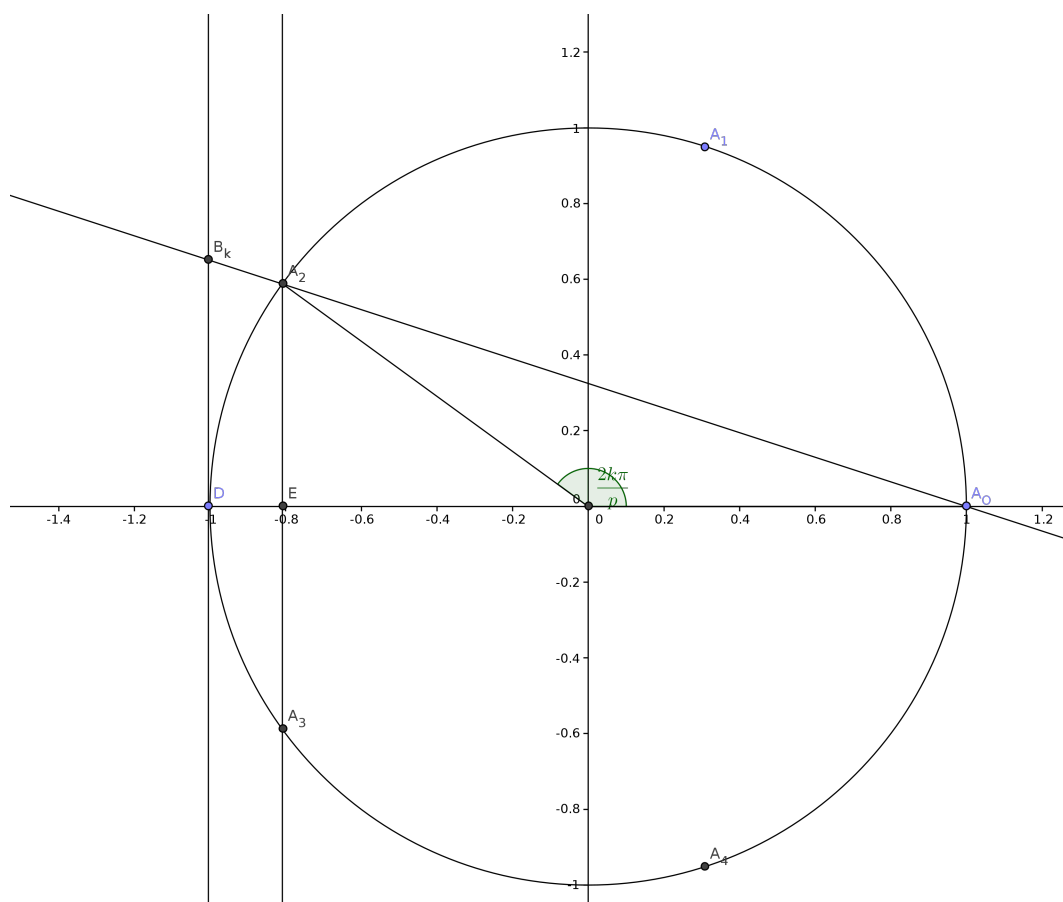
*

Pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on note B_k le point d'intersection de la droite $(A_0 A_k)$ avec la droite d'équation $x = -1$.

17. Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, montrer que l'ordonnée de B_k est $2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$.

RÉPONSE:

Remarque : Rapport du jury « Cette question étant géométrique, un schéma était une aide précieuse et a été valorisé ».



On note l'angle α l'angle $\widehat{A_k O A_0}$ L'angle $\widehat{O A_0 B_k}$ vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$
 Par définition

$$\tan(\widehat{O A_0 B_k}) = \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{p}\right) = \frac{B_k D}{2}$$

ce sui démontre

Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, l'ordonnée de B_k est $2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$.

*

On considère une variable W_p suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z_p = 2 \cotan\left(\frac{W_p \pi}{p}\right)$.

18. Calculer l'espérance de Z_3 et l'espérance de $|Z_3|$.

RÉPONSE:

Les variables aléatoire Z_p et $|Z_p|$ ayant toutes un support fini elles admettent toutes une espérance.

$$\begin{aligned}
 E(Z_3) &= \sum_{k=1}^2 2 \cotan\left(k \frac{\pi}{3}\right) \mathbb{P}(W_p = k) && \text{théorème de transfert}^{11} \\
 &= \frac{2}{2} \cotan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{2} \cotan\left(\frac{2\pi}{3}\right) && W_3 \text{ suit une loi uniforme} \\
 &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)} && \text{car } \cotan = 1/\tan \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z_3) = 0}$$

$$\begin{aligned}
 E(|Z_3|) &= \sum_{k=1}^2 \left| 2 \cotan\left(k \frac{\pi}{3}\right) \right| \mathbb{P}(W_p = k) && \text{théorème de transfert} \\
 &= \frac{2}{2} \left| \cotan\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| + \frac{2}{2} \left| \cotan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right| && W_3 \text{ suit une loi uniforme} \\
 &= \left| \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} \right| + \left| \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \right| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(|Z_3|) = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

*

19. Déterminer l'espérance de Z_p .

On pourra utiliser que pour tout $x \in D$, on a $\cotan(x) = -\cotan(\pi - x)$.

RÉPONSE:

Pour $x \in D$

$$\cotan(\pi - x) = \frac{1}{\tan(\pi - x)} = \frac{1}{-\tan(x)} = -\cotan(x)$$

$$\begin{aligned}
 E(Z_p) &= \sum_{k=1}^{p-1} 2 \cotan\left(k \frac{\pi}{p}\right) \mathbb{P}(W_p = k) && \text{théorème de transfert} \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(k \frac{\pi}{p}\right)
 \end{aligned}$$

On note $S = \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right)$

$$S = \sum_{k'=p-1}^1 \cotan\left((p-k')\frac{\pi}{p}\right)$$

changement d'indice $k' = p - k$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\pi - k\frac{\pi}{p}\right)$$

on remplace k' par k et "on écrit la somme dans le bon sens"

$$= - \sum_{k=1}^1 \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right)$$

indication

$$= -S$$

Ce qui démontre que $S = 0$.

$E(Z_p) = 0.$

*

On s'intéresse à la somme $S_p = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$. On rappelle que $p = 2q + 1$.

20. Exprimer $E(|Z_p|)$ en fonction de S_p et de p .

RÉPONSE:

$$\frac{1}{2} E(|Z_p|) = \sum_{k=1}^{p-1} \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right| \mathbb{P}(W_p = k)$$

théorème de transfert

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right|$$

W_p suit une loi uniforme

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p-1}\right) \right| + \frac{1}{p-1} \sum_{k=q+1}^{2q} \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p-1}\right) \right|$$

Chasles

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right| + \frac{1}{p-1} \sum_{k'=q}^1 \left| \cotan\left((p-k')\frac{\pi}{p}\right) \right|$$

changement indice deuxième somme $k' = 2q + 1 - k = p - k$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p-1}\right) \right| + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(\pi - k\frac{\pi}{p}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right| + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| -\cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right|$$

propriété de symétrie de cotan

$$= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right) \right|$$

$$= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(k\frac{\pi}{p}\right)$$

tan et cotan sont positives sur $]0; \pi/2[$

$$= \frac{2p}{p-1} S_p$$

$$E(|Z_p|) = \frac{4p}{p-1} S_p$$

Remarque : cela ne correspond pas tout à fait à ce qui est demandé.

*

21. La fonction cotangente est-elle intégrable sur $]0; \pi/2]$?

RÉPONSE:

La fonction $x \mapsto \cotan(x)$ est continue sur $]0; \pi/2]$ et positive sur cet intervalle. De plus

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

donc

$$\cotan \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Or pour $A \in]0; 1]$

$$\int_A^{\pi/2} \frac{1}{x} dx = \ln(\pi/2) - \ln(A)$$

qui diverge quand A tend vers 0^+

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx \text{ diverge.}$$

En utilisant le théorème de comparaison

$$\int_0^{\pi/2} \cotan(x) dx \text{ diverge.}$$

Remarque : on peut aussi calculer une primitive de cotan en reconnaissant une forme u'/u .

*

22. Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. En utilisant la monotonie de la fonction cotan sur $]0; \pi[$, montrer que l'on a :

$$\frac{\pi}{p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

RÉPONSE:

La fonction cotan est décroissante sur $]0; \pi/2[$ comme inverse de la fonction tan qui est croissante positive sur cet intervalle.

$$\forall t \in [k\pi/p; (k+1)\pi/p] \quad \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geq \cotan(t)$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens)

$$\int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) dt \geq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

$$\frac{\pi}{p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

*

23. En déduire que :

$$S_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) - \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \right).$$

RÉPONSE:

En sommant les inégalités précédentes

$$\sum_{k=1}^q \frac{\pi}{p} \cotan \left(\frac{k\pi}{p} \right) \geq \sum_{k=1}^q \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

donc, en utilisant une relation de Chasles

$$\pi S_p \geq \int_{\pi/p}^{(q+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

On reconnaît dans cotan une forme u'/u ce qui permet de conclure, en faisant attention aux signe des sinus,

$$S_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) - \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \right).$$

*

24. Déterminer la limite de S_p puis celle de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Remarque : Le rapport de jury signale beaucoup d'erreurs de manipulations des équivalents $\sim$.

$$\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) - \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) = \ln \left(\frac{\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right)$$

Or

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{p} \right) = 0$$

Par quotient

$$\frac{\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} q+1$$

Or comme $q \geq p/2$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} q = +\infty$$

donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} = +\infty$$

donc par composition

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right) = +\infty$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = +\infty}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} E(|Z_p|) = +\infty}$$

*

25. Donner un équivalent de $\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Remarque : Le rapport de jury « L'équivalent $\sin x \sim_0 x$ est souvent connu. Par contre ce n'est pas parce que deux suites u et v sont équivalentes que l'on peut en déduire que $\ln u \sim \ln v$. »

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{p} = 0$$

Par changement de variable

$$\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sin \left(\frac{\pi}{p} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)}{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)} &= \frac{\ln \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right) + \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)}{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)} \\ &= 1 + \frac{\ln \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right)}{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right)} \end{aligned}$$

propriétés du $\ln$

Or d'après l'équivalent calculé précédemment

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} = 1$$

donc par composition

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right) = 0$$

et comme

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right) = -\infty$$

Et par opération sur les limites (ne n'est pas une forme indéterminée)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right)}{\ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right)} = 1 + 0$$

$$\boxed{\ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right)}$$

*

26. Donner un équivalent de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$. On pourra s'inspirer des questions précédentes pour encadrer $E(|Z_p|)$.

RÉPONSE:

En s'inspirant de l'inégalité obtenue en 22, pour ¹² $k \in \llbracket 2, q \rrbracket$

$$\int_{(k-1)\pi/p}^{k\pi/p} \cotan(t) dt \geq \frac{\pi}{p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$$

donc par sommation

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/p}^{q\pi/p} \cotan(t) dt \geq \frac{1}{p} \sum_{k=2}^q q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$$

donc

$$\frac{\cotan\left(\frac{\pi}{p}\right)}{p} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/p}^{q\pi/p} \cotan(t) dt \geq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$$

Finalement en reprenant le résultat de 22

$$\boxed{\frac{\cotan\left(\frac{\pi}{p}\right)}{p} + \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right) \right) - \ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right) \right) \geq S_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin\left(\frac{(q+1)\pi}{p}\right) \right) - \ln \left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \right) \right)}$$

12. pas valable pour $k=1$

Quand p est suffisamment grand¹³

$$\frac{\frac{\cotan\left(\frac{\pi}{p}\right)}{p} + \frac{1}{\pi} \left(\ln\left(\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \right)}{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)} \leq \frac{S_p}{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)} \leq \frac{\frac{1}{\pi} \left(\ln\left(\sin\left(\frac{(q+1)\pi}{p}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \right)}{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)}$$

En utilisant des considérations semblables à ce qui précède on montrerait que les limites de droite et gauche des inégalités vaut $-\frac{1}{\pi}$ et donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{S_p}{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)} = -\frac{1}{\pi}$$

donc

$$S_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \frac{1}{\pi}$$

et d'après l'équivalent trouvé dans la question précédente

$$S_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\pi}$$

et donc

$$E(|Z_p|) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -4 \frac{\ln\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\pi}$$

qui est bien positif.

*

FÉLICITATIONS POUR AVOIR LU JUSQU'AU BOUT !

13. faire attention aux signes!