Banque « Agro-Véto »
A BCPST - 0422

MATHÉMATIQUES
MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de deux exercices totalement indépendants.

Exercice 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on pourra noter N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Prouver que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1).$$

6. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$.
7. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme.
8. (a) Prouver que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
9. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1}^2)$, $\mathbb{E}(X_n^2)$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
10. En déduire une expression de $\mathbb{V}(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

Soit λ un réel.

1. Donner, en fonction de λ, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle
   $y'' + \lambda y = 0$.
   On fera une distinction de cas suivant le signe de λ.
2. Déterminer, en fonction de λ, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle
   $y'' + \lambda y = 0$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
   On fera une distinction de cas suivant le signe de λ.

II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

Dans cette partie, on étudie une discrétisation de l'équation différentielle avec conditions aux bords étudiée à la question précédente. Pour cela, on fixe un entier N supérieur ou égal à deux et une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on pose $x_k = f(k/N)$.

Pour tout $k \in [\![1,\ N-1]\!]$, $f''(k/N)$ est approximé par :

$$\frac{\dfrac{x_{k+1}-x_k}{1/N} - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{1/N}}{1/N} = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2}.$$

On se ramène ainsi à chercher des réels $x_0, \dots, x_N$ tels que :

$$(*) \quad : \quad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2} + \lambda x_k = 0.$$

On note Λ l'ensemble des réels λ tel qu'il existe des réels $x_0, \dots, x_N$ non tous nuls vérifiant $(*)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une matrice $M_{N-1,\lambda} \in \mathscr{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ telle que des réels $x_0, \dots, x_N$ vérifient $(*)$ si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $M_{N-1,\lambda}$.

Pour tout entier n non nul, on considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. Déterminer une relation entre Λ et l'ensemble des valeurs propres de A_{N-1}.
5. Justifier que pour tout entier n non nul, la matrice A_n est diagonalisable et en déduire que le cardinal de Λ est inférieur ou égal à $N-1$.
6. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A_3 = PDP^{-1}$.
7. Prouver qu'un réel μ est valeur propre de A_{N-1} si, et seulement s'il existe une suite v non nulle vérifiant $v_0 = v_N = 0$ et, pour tout entier n, $v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$.
8. On fixe μ un réel et on considère une suite u telle que pour tout entier n, on ait : $u_{n+2} = \mu u_{n+1} - u_n$.
   (a) On suppose que $|\mu| > 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors u est la suite nulle.
   (b) On suppose que $|\mu| = 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors u est la suite nulle.
   (c) On suppose que $|\mu| < 2$.
      i. Prouver que le polynôme $X^2 - \mu X + 1$ a ses racines conjuguées et de module 1. On les note $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
      ii. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que μ soit valeur propre de A_{N-1}.
      iii. En déduire que A_{N-1} possède $N-1$ valeurs propres distinctes.

9. En déduire Λ.
10. Soit k un entier fixé. Trouver la limite de $\dfrac{2-2\cos(k\pi/N)}{1/N^2}$ lorsque N tend vers $+\infty$.
11. Relier ce résultat à celui obtenu à la question 2.

III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

On considère un réel λ et b une fonction définie sur $[0,1]$ et l'on recherche les fonctions f solutions de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = b$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

On fixe un entier N supérieur ou égal à deux et, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on pose $b_k = b(k/N)$.

En discrétisant l'équation, on est ramené à chercher des réels $x_0, \dots, x_N$ tels que :

$$(*) \quad : \quad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{(1/N)^2} + \lambda x_k = b_k.$$

ce qui se réécrit matriciellement :

$$(**) \quad : \quad x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad M_{N-1,\lambda} X = B,\ \text{en posant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}.$$

On admet que $M_{N-1,\lambda}$ a $N-1$ valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_{N-1}$ données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!] \quad \mu_k = \lambda/N^2 - 2 + 2\cos(k\pi/N).$$

12. Prouver que si $\lambda < 0$, alors $(**)$ a une unique solution.

On considère la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonnes de taille $N-1$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$, alors sa norme est égale à :

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} x_k^2}.$$

Comme le produit matriciel ${}^tXX$ est égal à la matrice de taille 1×1 :

$$\left(x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 \right),$$

on notera $\|X\|^2 = {}^tXX$, en identifiant le réel $\|X\|^2$ et la matrice $(\|X\|^2)$.

On suppose dans la suite que $\lambda < 0$ et on considère B et $\widetilde{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$. On note X et $\widetilde{X}$ les matrices colonnes telles que $M_{N-1,\lambda} X = B$ et $M_{N-1,\lambda}\, \widetilde{X} = \widetilde{B}$.

13. Soit D une matrice diagonale D de taille $N-1$ de coefficients diagonaux notés $d_1, \cdots, d_{N-1}$. Exprimer $\|DX\|$ en fonction des coefficients de D et X.

14. Prouver que $\|B\| \leq -\mu_{N-1}\|X\|$.

15. Prouver que $\left\|X - \widetilde{X}\right\| \leq -\dfrac{1}{\mu_1}\left\|B - \widetilde{B}\right\|$.

16. On suppose que B n'est pas la matrice nulle.

    Justifier que l'on a l'inégalité (I) : $\dfrac{\left\|X - \widetilde{X}\right\|}{\|X\|} \leq \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} \dfrac{\left\|B - \widetilde{B}\right\|}{\|B\|}$.

17. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = +\infty$.

18. Prouver qu'il existe des matrices B et $\widetilde{B}$ distinctes telles que (I) soit une égalité.

19. Quel problème numérique cela peut-il poser ?

FIN DU SUJET