Probabilités : Couple de variables aléatoires discrètes

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Mars 2024

Table des matières

I Exemples et Définitions

I.1 Exemples

Exemple : On lance deux pièces non truquées et de couleur distincte, on note X_1 le résultat de la première pièce et X_2 le résultat de la deuxième pièce. On peut étudier le couple de variables aléatoires (X_1, X_2).

Exemple : On lance deux dés de couleur différente. On note X_1 le résultat du premier dé, X_2 celui du deuxième dé. (X_1, X_2) forment un couple de variable aléatoires.

Exemple : Dans une urne se trouve trois billes numérotées de 1 à 3. On effectue trois tirages successifs et avec remise. On note m le minimum des trois tirages et M le maximum des trois tirages. (m, M) forment un couple de variable aléatoires.

I.2 Loi du couple

Définition 1 (Loi de probabilité)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. La loi *du couple (X, Y) est la donnée des réels $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout couple $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$*

Remarque : On dit aussi *loi conjointe du couple*, ou tout simplement loi de (X, Y).

Exemple : Dans le premier exemple $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ en supposans que X_1 vaut 1 dans le cas d'un pile et 0 sinon. La loi du couple est la donnée des quatre réels suivants :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$

Exemple : Dans le deuxième exemple $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et la loi de probabilité du couple est donnée par

$$\forall i \in [\![1, 6]\!] \quad \forall j \in [\![1, 6]\!] \qquad \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{36}$$

Exemple : Dans le troisième exemple on a $m(\Omega) = M(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et nous devons calculer, une à une (pour le moment) toutes les probabilitées suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([m=1]\cap[M=1]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
\mathbb{P}([m=2]\cap[M=2]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
\mathbb{P}([m=3]\cap[M=3]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
\mathbb{P}([m=1]\cap[M=2]) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
\mathbb{P}([m=2]\cap[M=1]) &= 0 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

Question : Combien y-a-t'il de calculs à faire ? Justifier les réponses.

I.3 Notations

À la place de $\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$ on peut noter $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ ou $\mathbb{P}([X=x],[Y=y])$.

I.4 rappel Indépendance

Définition 2 (indépendance de deux variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$*. On dit que X et Y sont* indépendantes *si et seulement si*

$$\forall x\in X(\Omega)\quad \forall y\in Y(\Omega)\qquad \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])=\mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y])$$

On peut voir l'indépendance sur les tableaux précédents après avoir calculer les lois marginales. « Chaque case doit être le produit de la colonne et de la ligne ».

On doit se servir de la définition précédente de deux manières différentes.

1. Si l'énoncé précise que les deux variables aléatoires sont indépendantes, ou si c'est sous-entendu ("deux dés lancés", " deux tirages dans une même urne avec remise...."). Alors il faut utiliser la relation de la définition pour faire des calculs .
2. L'énoncé introduit deux variables aléatoires discrètes, et demande (éventuellement après plusieurs calculs) si ces deux variables aléatoires sont indépendantes ou non. Il faut alors vérifier si les égalités $\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$ sont vérifiées.

II Lois conditionnelles et lois marginales

II.1 Lois marginales

Dans les exemples précédents, nous connaissions les lois de X et Y et nous en déduisions la loi du couple. Soit un couple (X,Y) de variables aléatoires tel que

$$X(\Omega)=\{1,2\}\qquad Y(\Omega)=\{1,2,3\}$$

dont la loi est donnée par

$$\forall x \in \{1,2\} \quad \forall y \in \{1,2,3\} \qquad \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \frac{1}{6}$$

On peut alors calculer, à l'aide du théorèmes des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X=1) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=y]) = \frac{3}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=y]) = \frac{3}{6}$$

Question : Préciser dans chaque cas le système complet d'événements. On a donc calculé la loi de X. On peut faire la même chose avec Y.

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{x=1}^{2} \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=1]) = \frac{2}{6}$$

Nous pouvons ensuite représenter ces résultats sous forme d'un tableau.

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

(exemple1)

On voit apparaître en marge du tableau les lois de X et de Y, que l'on a pu reconstituer à partir de la loi du couple.

Proposition 1 (Lois marginales)**.**
Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes Alors la loi (marginale) *de X est donné par le théorème des probabilités totales.*

$$\forall \square \in X(\Omega) \qquad \mathbb{P}(X=\square) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=\square]\cap[Y=y])$$

et

$$\forall \nabla \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}(Y=\nabla) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=\nabla])$$

Attention : Dans le cas ou les variables aléatoires ne sont pas finies, les sommes est une série à termes positifs qui converge.

Attention : Ceci n'est pas un nouveau théorème c'est la reformulation du théorème des probabilités totales. C'est donc ce dernier théorème qu'il faut citer à l'écrit, en indiquant le système complet d'évènement utilisé.

Exercice : Après avoir vérifier que le tableau suivant décrit bien une loi conjointe, trouver les lois marginales de X et Y.

X/Y	1	2	3	loi de X
1	1/6	1/6	1/6	
2	1/12	0/	1/18	
3	1/12	1/6	2/18	
loi de Y				1

(exemple2)

II.2 Lois conditionnelles

Définition 3 (Lois conditionnelles)**.**
Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ *et soit* $y \in Y(\Omega)$ *telle que* $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$. *On définit* la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ *par*

$$\forall \square \in X(\Omega) \qquad \mathbb{P}_{(Y=y)}(X=\square) = \frac{\mathbb{P}([Y=y]\cap[X=\square])}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

C'est bien un loi de probabilité !
Exemple : En reprenant le tableau exemple1. On calcule les trois lois conditionnelles pour X.

$$\text{sachant } Y=1 \qquad \mathbb{P}_{Y=1}(X=1) = \frac{1/6}{1/3} = \mathbb{P}_{Y=1}(X=2)$$

$$\text{sachant } Y=2 \qquad \mathbb{P}_{Y=2}(X=1) = \frac{1/6}{1/3} = \mathbb{P}_{Y=2}(X=2)$$

$$\text{sachant } Y=3 \qquad \mathbb{P}_{Y=3}(X=1) = \frac{1/6}{1/3} = \mathbb{P}_{Y=3}(X=2)$$

On peut bien sur définir les lois conditionnelles de Y de la même façon, il y en a deux.

$$\text{sachant } X=1 \qquad \mathbb{P}_{X=1}(Y=1) = \frac{1/6}{1/2} = \mathbb{P}_{X=1}(Y=2) = \mathbb{P}_{X=1}(Y=3)$$

$$\text{sachant } X=2 \qquad \mathbb{P}_{X=2}(Y=1) = \frac{1/6}{1/2} = \mathbb{P}_{X=2}(Y=2) = \mathbb{P}_{X=2}(Y=3)$$

Exercice : Faire le même travail sur exemple2.

Proposition 2 (Probabiltés totales : De la loi conditionnelle à la loi marginale)**.**
Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ *et telles que pour tout* $y \in Y(\Omega)$ *on a* $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$.
Alors pour $\square \in X(\Omega)$ *:*

$$P(X=\square) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}_{(Y=y)}(X=\square)$$

Attention : Ceci n'est pas un nouveau théorème c'est la reformulation du théorème des probabilités totales. C'est donc ce dernier théorème qu'il faut citer à l'écrit, en indiquant éventuellement le système complet d'évènement utilisé.

II.3 Une urne variable

On choisit un entier naturel selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si cet entier est k on rempli l'urne avec k boules rouges et une boule noire. On mélange les boules l'urne et on tire une bille. On gagne si la bille est noire. Calculer la probabilité de gagner.

II.3.a Formalisation

Il faut comprendre ici que l'on nous donne, indirectement, des *probabilités conditionnelles*.

Notons X la variable aléatoire liée au nombre entier choisi avec la loi de Poisson. Notons Y la variable aléatoire lié au succès. $Y = 1$ si la bille tirée est noire $Y = 0$ sinon.

D'après l'énoncé

$$\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=1) = \frac{1}{1+k}$$

II.3.b Calculs

On peut donc appliquer le théorème des probabilités totales avec le système complet d'évènement $[X = 0]$, $[X = 1]$,...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=1) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i+1)!} && \text{propriétés de la factorielle} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} - 1 \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \right)
\end{aligned}$$

Exercice : Montrer que ce nombre peut bien être la probabilité d'un événement.

Exercice : Calculer la loi (conjointe) du couple (X, Y).

III Méthodes et résultats à connaître sur les couples de VAD

III.1 Créer de nouvelles variables aléatoires

Proposition 3.
Soit X et Y deux variables aléatoires. Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f(x, y)$ soit défini pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$.
Alors $f(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

Exercice :
Dans chacun des cas suivants expliciter qu'elle la fonction f

- $\max(X, Y)$ est une vad on pose $f(.,.) =$
- $\min(X, Y)$ est une vad on pose $f(.,.) =$
- $X + Y$
- XY

Théorème 1.
*Soit $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes **finies** et $g\ : (x, y) \mapsto g(x, y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Alors

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}\left(\llbracket 1, 6\rrbracket\right)$ avec $n \geqslant 3$.

III.2 Méthode : calculer la loi d'un maximum ou d'un minimum

Méthode loi d'un maximum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour calculer la loi de $\max(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\max(X, Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\max(X, Y) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant x)$$

Ce qui permet de calculer la fonction de répartition.

Méthode loi d'un minimum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour Calculer la loi de $\in (X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\min(X, Y) > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) > x) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > x)$$

Et en utilisant $\mathbb{P}(\square \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(\square > x)$ permet de trouver un lien entre fonction de répartition de X, Y et du minimum.

Exercice : Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer la loi du maximum et du maximum de X et Y

III.3 Méthode : Calculer la loi d'une somme

Méthode loi d'une somme

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour calculer la loi de $X+Y$ on peut remarquer que pour tout entier naturel

$$[X+Y=n]=\bigcup_{k=0}^{n}[X=k]\cap[Y=n-k]=\bigcup_{k=0}^{n}[X=n-k]\cap[Y=k]=\bigcup_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n\\i+j=n}}[X=i]\cap[Y=j]$$

Et ces événements sont incompatibles deux-à-deux.

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

Il faut adapter les indices des $\sum$ précédentes au support de X et Y

III.3.a Résultat à connaître : Stabilité de la loi de Poisson pour la somme

Théorème 2 (Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson)**.**
Soit λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs.
*Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$. On suppose de plus que X et Y sont **indépendantes**.*
Alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

Démonstration :

III.3.b Exercice classique : Stabilité de la loi binomiale pour la somme

***lemme* 1** (Égalité de Vandermonde)**.**

Soit m,n et k trois entiers naturels alors

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration :

Théorème 3 (Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales « avec le même p »)**.**
*Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels et $p \in \,]0;1[$. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$. On suppose de plus que X et Y sont **indépendantes**. Alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$$

Démonstration :
À savoir faire

IV Indépendance et covariance

IV.1 Indépendance et conséquences

Définition 4 (Rappel : indépendance de deux variables aléatoires discrètes)**.**

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes *si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y])$$

Proposition 4 (Rappel espérance d'une somme : linéarité de l'espérance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes[1] *admettant une espérance alors $X+Y$ admet une espérance et*

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Plus généralement si α et β sont des réels $\alpha X+\beta Y$ admet une espérance et

$$E(\alpha X+\beta Y) = \alpha E(X)+\beta E(Y)$$

Démonstration :
À savoir faire

Proposition 5 (Espérance d'un produit)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ***indépendantes*** *admettant une espérance telle que XY admet une espérance alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Attention : Quelle sont les différences entre les hypothèses de ces deux théorèmes ?

Démonstration :

IV.2 Covariance

Définition 5 (Covariance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On note alors

$$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y)]$$

1. **non nécessairement indépendantes**

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

(exemple1)

Nous allons calculer directement la covariance

Proposition 6 (Propriétés de la covariance)**.**
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Soit α et β deux réels.

1. Symétrie : $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
2. La variance comme covariance $Cov(X,X) = V(X)$
3. Linéarité à gauche $Cov\big(\alpha X + \beta Y, Z\big) = \dots$
4. Linéarité à droite $Cov\big(X, \alpha Y + \beta Z\big) = \dots$
5. *Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en* bilinéarité

Exercice 1 (Calculs classiques)**.**
X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Simplifier les expressions suivantes

1. $\mathrm{Cov}(X+Y, X+Y)$
2. $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$
3. $\mathrm{Cov}(X-Y, X-Y)$

Proposition 7 (Variable presque certaine)**.**
Soit c une constante (ou une variable aléatoire presque certaine égale à c).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$Cov(X,c) = 0$$

$$Cov(X+c, Y) = Cov(X,Y)$$

Théorème 4 (Formule de Huygens)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration :

Proposition 8 (Lien entre covariance et indépendance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

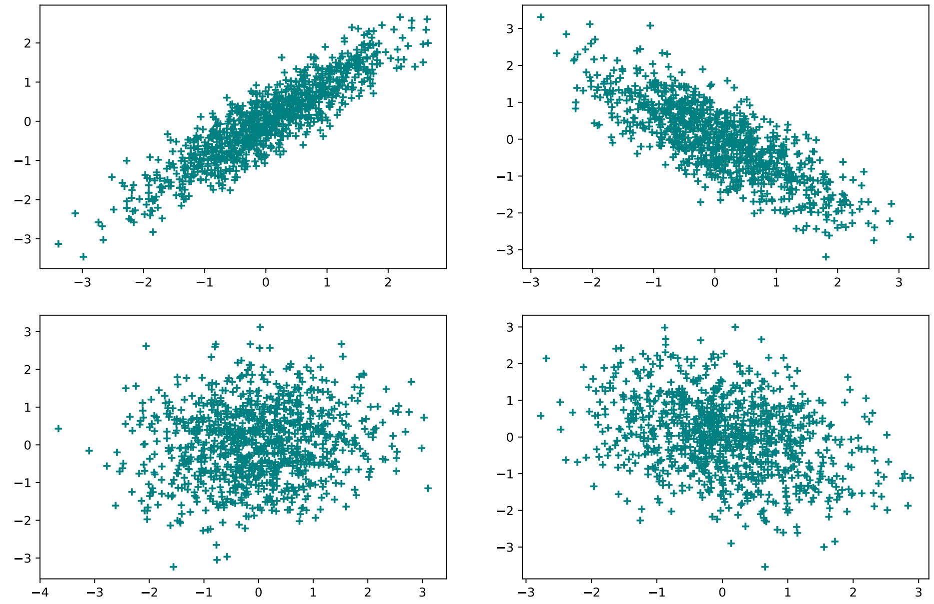
$$Cov(X,Y) = 0$$

Attention : La réciproque est fausse !!

Exercice 2.
On choisi X et Y deux variables aléatoires indépendantes centrées réduite ; Pour $\alpha \in]-1;1[$ on pose

$$Z = \alpha X + \sqrt{1-\alpha^2}\,Y$$

1. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Z)$
3. Parmi les figures suivantes trouver celle pour lequel α vaut -0.8, -0.3, 0.1, 0.9



Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	-1	1	loi de X
0	1/3	1/3	
1	0	1/3	
loi de Y			1

(exemple2)

Calculons la covariance de (X, Y)

Proposition 9 (Variance d'une somme)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit α et β deux réels

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y)$$

Proposition 10 (Variance d'une somme de deux vad indépendantes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On suppose que X et Y sont indépendantes Alors

$$V(X+Y) =$$

IV.3 Rappels Suites de variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$

Proposition 11 (Espérance et variance d'une somme)**.**
Soit X_1, X_2, ... X_n, n variables aléatoires qui admettent des espérances . Alors $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ admet une espérance et

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$

*Si de plus ces variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** et admettent des moment d'ordre 2, alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 et :*

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$