Lycée Champollion, Grenoble — **2023-2024**
T.D. de Mathématiques — BCPST Spé 2

COUPLES DE VAD

Les basiques

Exercice 1.
Le couple de variable aléatoires (X, Y) a pour loi conjointe

X/Y	1	2	3	
1	$1/5$	$1/5$	α	
2	$1/10$	$1/10$	$1/20$	
3	$1/5$	0	$1/10$	

1. Trouver la valeur de α pour que l'on ait bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginale de X et Y.
3. Calculer la loi de X sachant $Y = 1$
4. Les variables aléatoires sont elles indépendantes ?

Exercice 2.
Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{12} \qquad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

On note $Y = X^2$.

1. Calculer la loi du couple (X, Y)
2. X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 3.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k billes numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la bille tirée.

1. L'énoncé nous donne de façon implicite deux probabilités, dont une conditionnelle. Lesquelles ?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$
5. X et Y sont elles des variables aléatoires indépendantes ?
6. Écrire une fonction `simul(n)` qui renvoie une simulation des valeurs de X et Y. On rappelle que `random.randint(a,b)` renvoie un entier au hasard uniformément entre a et b.
7. Utiliser la fonction précédente pour calculer une estimation de $\mathbb{P}(X = Y)$.

Les classiques

Exercice 4.
Les clients d'un supermarché on chacun une probabilité $p \in]0;1[$ de payer avec une carte bancaire

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients en une journée et Y le nombre de personne payant par carte bancaire en une journée. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisée $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler les propriétés de la loi de Poisson.
2. Interpréter l'énoncé pour obtenir $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i)$
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Exercice 5 ().
Dans cet exercice on pourra manipuler les Σ infini comme des Σ finis.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la somme des probabilités $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = 1$
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 6.
Dans cet exercice on pourra manipuler les Σ infini comme des Σ finis.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k]) = a\cdot\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 7 (Somme double pour calcul d'une espérance)**.**
On Continue ici l'exercice 3

1. Montrer que $E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} \frac{i}{k}$
2. En déduire que $E(Y) = \frac{n+3}{4}$
3. Avec une technique analogue calculer $E(Y^2)$ et en déduire la variance de Y.

Les techniques utiles

Exercice 8.
x, y et z désignent des réels.

1. Montrer que $x+y=\max(x,y)+\min(x,y)$
2. Montrer que $\max(x,y,z)=\max(\max(x,y),z)$
3. Montrer que $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
4. Trouver une formule analogue pour $\max(x,y)$

Exercice 9.
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires. Le but de cet exercice est de « commencer » à calculer la loi de $X+Y$. Compléter les formules suivantes

1. **Exemple** Si $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ alors $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$ et
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad [X+Y=n]=\bigcup_{j=0}^{n}[X=j]\cap[Y=n-j]=\bigcup_{j=0}^{n}\cdots$$
et dans cette union les événements sont incompatibles deux à deux.
2. Si $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors ...
3. Si $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors ...
4. Si $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ alors ...
5. Si $X(\Omega)=\mathbb{Z}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{Z}$ alors ...

Exercice 10 (Maximum de trois vad, minimum de trois vad)**.**
Soit X, Y et Z trois vad de support $\mathbb{N}$ en s'inspirant du cours donner une méthode pour calculer $\min(X,Y,Z)$ et $\max(X,Y,Z)$

Somme, max, min

Exercice 11.
On lance deux pièces qui donnent pile avec la probabilité $p\in]0;1[$.
On lance la première pièce jusqu'au premier pile et on note X_1 le rang du premier pile pour la première pièce. On prend la deuxième pièce et on la lance jusqu'à obtenir un pile et on note X_2 le rang d'apparition du premier pile .

1. Analyse dy sujet : X_1 et X_2 sont elles indépendantes ? Qu'elles sont leur loi.
2. Calculer la loi de X_1+X_2
3. Calculer $\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1=k)$
4. Analyse du sujet : Décrire une expérience avec des dès qui nous ferait à faire le même type de calcul

Exercice 12 (une somme)**.**
On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une même loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$.
On pose $Z=X+Y$

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n\in\mathbb{N}$
$$[Z=n]=\bigcup_{k=\ldots}^{\ldots}[X=k]\cap[Y=\ldots]$$
2. En déduire la loi de Z

Exercice 13.
Soit X et Y deux variable aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité de l'évènement
$$\max(X,Y)=\min(X,Y)$$

Exercice 14 (Trois lois de Bernoulli)**.**
Soit A, B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p\,]0;1[$.

1. Calculer la loi de ABC
2. A et ABC sont elles indépendantes ?

Exercice 15 (Trois lois uniformes)**.**
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes.

1. Calculer la loi de $\max(X,Y,Z)$.
2. Quelles sont les valeurs prises par $X+Y$?
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k\in[\![2,n]\!]\\[2mm] \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k\in[\![n+1,2n]\!]\end{cases}$$
4. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.

Exercice 16.
Soit p et r deux réels de $]0;1[$, et
$$X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)\qquad Y\hookrightarrow\mathcal{G}(r)$$
On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{P}(X\geqslant k)$.
2. En déduire la loi de $\min(X,Y)$
3. Calculer $\mathbb{P}(X\geqslant Y)$
4. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces.

Covariance

Exercice 17.
Soit A et B deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$

1. Simplifier $[A+B=2n]\cap[A-B=0]$
2. En déduire que $A+B$ et $A-B$ ne sont pas indépendantes
3. Montrer $\operatorname{cov}(A+B,A-B)=V(A)-V(B)$
4. $A+B$ et $A-B$ sont elles corrélées ?

Exercice 18.
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Compléter la formule suivante

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \left(\sum \sum x_? y ? \mathbb{P}(?) \right) - E(X)E(Y)$$

Exercice 19.
Soit X une variable aléatoire suivante la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit z une variable aléatoire suivant la loi donnée par :

$$z(\Omega) = \{-1,\ 1\} \qquad \mathbb{P}(z = -1) = \mathbb{P}(z = 1)$$

On suppose que X et z sont indépendantes et on note

$$Y = zX$$

1. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
4. Conclusion ?

Exercice 20.
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre λ.

1. Donner la loi de $X + Y$ et la loi de $Y + Z$
2. Calculer la covariance de $X + Y$ et $Y + Z$

Exercice 21.
La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(X, p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0; 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}_{X=j}(Y = i)$. On distinguera les cas $i \leqslant j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X, Y).
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre d'échec. Montrer sans calcul que Z suit une loi de Poisson de paramètre λq.
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
6. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\mathrm{cov}(X, Y)$.
7. En déduire $\mathrm{cov}(X, Y)$.
8. Que vaut $\mathrm{cov}(X, Z)$?

Exercice 22.
On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geqslant 4$ et $n \geqslant 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Analyse du sujet Comment interpréter l'énoncé « répartit aléatoirement… » ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. Calculer $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$.
5. X_i et X_j sont elles indépendantes
6. Analyse du sujet décrire une expérience qui nous ferait faire le même type de calculs.

Suites de vad

Exercice 23 (Somme de loi de Bernoulli)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 24 (Somme de lois binomiales)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi binomiale $\mathscr{B}(?, ?)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 25 (Somme de lois Poisson)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 26.
Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathscr{G}(p)$. On note $m = \min(X_1 X_2, \dots, X_n)$ et $M = \max(X_1 X_2, \dots, X_n)$. On note $q = 1 - p$, et k désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_i > k) = q^k$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m > k)$ et en déduire la loi de m.
3. Calculer $E(m)$.
4. Calculer la loi de M.

Exercice 27.
Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2 et n_3 boules portant le numéro 3. On effectue k tirages avec remise et no note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de boules 1 obtenues, X_2 le nombre de billes 2 obtenues et X_3 le nombre de billes 3.

1. Donner les lois des variables X_1, X_2, X_3 ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$ et en déduire $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.
3. Que peut on dire du signe de cette covariance ?
4. Proposer un programme python pour simuler cette expérience.
5. On suppose maintenant que $n_2 = n_1$ et $n_3 = 0$. Que vaut alors $\mathrm{Cov}(()\, X_1, X_2)$

Exercice 28.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0; 1[$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

1. Déterminer les lois de Y_2 et Y_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire la loi de Y_n .
4. Calculer, pour tout $n \in N$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes?
6. Écrire une fonction `simulationY(n,p)` en python pour simuler la variable aléatoire Y_n.

Exercice 29.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0;1[$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

et on note B_i une variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli $\mathscr{B}(p)$

1. Trouver deux réels a et b tel que $X_i = aB_i + b$
2. Trouver la loi de S_n, donner son espérance et sa variance.
3. Ecrire une fonction `simulationS(n,p)` en python pour simuler la loi de S_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(S_n, S_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles S_n et S_{n+1} sont indépendantes?

Pour aller plus loin

Exercice 30.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la loi $\mathscr{B}(p)$.

Soit N un variable aléatoire indépendante des précédentes qui suit une loi $\mathscr{P}(\lambda)$ On note pour tout entier

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Pour n fixé donner la loi de S_n.
2. On pose $Y = S_N$. Donner $\mathbb{P}_{N=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi de Y.
4. Bonus reprendre l'exo pour $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$

Exercice 31 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et coefficient de corrélation linéaire)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle.

On défini le coefficient de corrélation linéaire par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

1. En s'sinpirant de la démonstration vue pour le produit scalaire, démontrer que

$$\left|\rho(X, Y)\right| \leqslant \sigma_X \sigma_Y$$

2. Quef est le cas d'égalité
3. En déduire $\left|\rho(X, Y)\right| \leqslant 1$

Exercice 32 (Variance d'une somme de n VAD)**.**
Soit X_1, X_2, ... X_n, n variables aléatoires qui admettent des moment d'ordre 2

1. Compléter et démontrer la formule

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{\cdots\cdots} \text{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

2. Combien y a til de termes dans le second sigma?