# MATHÉMATIQUES 2022

Méthodes de calcul et raisonnement

Réponses

**L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.**
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5 .
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Ce sujet est constitué de deux exercices totalement indépendants.**

# Exercice 1.

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 . On considère une urne contenant $n$ boules indiscernables numérotées de 1 à $n$.
On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.
Pour tout entier $i$, on pourra noter $N_i$ la variable aléatoire égale au numéro de la $i$-ème boule tirée s'il y a eu au moins $i$ tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de $X_2$ puis donner son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

On retire au minimum une boule à chaque étape

$$X_2(\Omega) \subset [\![1, 2]\!]$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{équiprobabilité}^{1} \text{ car boules indiscernables}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) \\ &= \mathbb{P}(N_1 = 2) P_{N_1=2}(N_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \qquad \text{si } [N_1 = 2] \text{ est réalisé, il ne reste que la boule 1 lors du deuxième tirage}\end{aligned}$$

On peut raisonner avec l'événement contraire mais c'est cette méthode qui sera généralisé dans les questions suivantes

$$\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 2]\!])}$$

D'après le cours

$$\boxed{E(X_2) = \frac{3}{2} \qquad V(X_2) = \frac{1}{4}.}$$

*

2. Trouver la loi de $X_3$ et donner son espérance.

RÉPONSE:

Comme on retire au moins une boule à chaque tirage

$$X_3(\Omega) \subset [\![1, 3]\!]$$

$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 2) &= \mathbb{P}(([N_1 = 2] \cap [N_2 = 1]) \cup ([N_1 = 3] \cap [N_2 = 1])) \\
&= \mathbb{P}(([N_1 = 2] \cap [N_2 = 1]) + P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 1]) && \text{événements incompatibles} \\
&= \mathbb{P}(N_1 = 2) P_{N_1=2}(N_2 = 1) + \mathbb{P}(N_1 = 3) P_{N_1=3}(N_2 = 1) && \text{les conditionnements ne sont pas de probabilités nulles} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

si $[N_1 = 3]$ est réalisé au deuxième tirage l'urne contient 2 boules

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]) \\
&= \mathbb{P}(N_1 = 3) P_{N_1=3}(N_2 = 2) P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) && \text{proba composées} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!] \qquad \mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned}
E(X_3) &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_3) = \frac{11}{6}}$$

*

3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre $X_n$.

RÉPONSE:

À chaque étape on retire au moins une boule

$$\boxed{X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]}$$

**rapport** Le verbe "donner" pouvait porter à confusion ; les résultats non justifiés ont été acceptés.

*

4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.

RÉPONSE:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{n} \qquad N_1 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, n]\!] \text{ (rapport)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = n) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [N_k = n+1-k]\right) \\
&= \mathbb{P}(N_1 = n) P_{[N_1=n]}(N_2 = n-1) P_{[N_1=n]\cap[N_2=n-1]}(N_3 = n-2) \times \cdots \times P_{[N_1=n]\cap\cdots\cap[N_{n-1}=2]}(N_n = 1) \text{ proba composées} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \rtimes 12 \times 1n
\end{aligned}$$

Si $[N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_k = n+1-k]$ est réalisé l'urne est alors composée des boules $1,\ 2$ $, \ldots,\ k-1$

$$= \frac{1}{n!}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$$

*

5. Prouver que pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$$

RÉPONSE:

Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
$([N_1 = i])_{i\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_1 = i)P_{N_1=i}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} P(N_1 = i)P_{N_1=i}(X_n = k) && P_{N_1=1}(X_n = k) = 0 \text{ car } k > 2 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} P_{N_1=i}(X_n = k) && \text{premier tirage équitable} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1)
\end{aligned}$$

Si on suppose que $[N_1 = i]$est réalisé, le reste des tirages s'effectue dans une urne qui contient les boules $1, \dots, i-1$ le tirage vide l'urne en $k$ étapes si et seulement si à partir du deuxième tirage il faut $k-1$ tirage pour vider l'urne.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)}$$

**Remarque :** La formule reste vraie si $k > n$, toutes les probabilités sont alors nulles, de plus dans la somme les termes tels que $i < k$ sont tous nuls.

*

6. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n = k-1) \\
&= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \right) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n = k-1) \\
&= \frac{n}{n+1}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n = k-1) && \text{question précédente}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)\\
&= 1\times\mathbb{P}(X_{n+1}=1)+\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n+1=k)\\
&= \frac{1}{n+1}+\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n+1=k)\\
&= \frac{1}{n+1}+\sum_{k=2}^{n+1} k\left[\frac{n}{n+1}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n=k-1)\right] && \text{p}\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n=k-1)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n=k) && \text{car } \mathbb{P}(X_n=n+1)=0 \quad \text{et changement d'indice}\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k)-1\mathbb{P}(X_n=1)\right]+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_n=k)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\left[\mathbb{E}(X_n)-\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(X_n)+\frac{1}{n+1} && \text{car } \mathbb{P}(X_n=1)=\frac{1}{n} \text{ et } ([X_n=k])_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ SCE}\\
&= \mathbb{E}(X_n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\\
&= \mathbb{E}(X_n)+\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1})-\mathbb{E}(X_n)=\frac{1}{n+1}}$$

**Remarque :** Le rapport reconnaît que c'értait une question difficile mais déplore que certains tentent des réponses malhonnêtes

*

7. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme.

RÉPONSE:

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n)-\mathbb{E}(X_1) &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_{k+1})-\mathbb{E}(X_k]) && \text{télescopage}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Donc comme $\mathbb{E}(X_1) = 1$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

*

8. (a) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

RÉPONSE:

**Attention : Classique**

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\forall t \in [k; k+1] \qquad \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

De même

$$\forall t \in [k-1; k] \qquad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant 2, : \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

*

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

RÉPONSE:

Soit $n \geqslant 2$ en sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![2, n]\!]$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$$

en utilisant la relation de Chasles

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$$

en rajoutant le terme $k = 1$ de la somme qui vaut 1

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

En divisant par $\ln(n)$ qui est positif[2]

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{\ln(2)+1}{\ln n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

en utilisant les propriétés du logarithme[3]

$$\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{\ln(2)+1}{\ln n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{\ln(2)+1}{\ln n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Or

$$\lim_{+\infty} \ln n = +\infty \qquad \lim_{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

Par opérations et comme il n'ya pas de formes indéterminées

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{\ln(2)+1}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{\ln n} = 1$$

Donc en utilisant le théorème des encadrements

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$$

2. rapport
3. rapport : ce calcul est à faire on ne peut pas admettre $\ln n \sim_{+\infty} \ln(n+1)$, classique

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

$*$

(c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

$*$

9. Trouver une relation entre $\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right), \mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ et $\mathbb{E}(X_n)$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \mathbb{P}(X_{n+1}=k) \\
&= 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1}=1) + \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n+1=k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \mathbb{P}(X_n+1=k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \left[\frac{n}{n+1}\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n=k-1)\right] \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} k^2\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} k^2\mathbb{P}(X_n=k-1) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\sum_{k=2}^{n} k^2\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2\mathbb{P}(X_n=k) \qquad \text{car } \mathbb{P}(X_n=n+1)=0 \qquad \text{et changement d'indice} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X_n=k) - 1^2\mathbb{P}(X_n=1)\right] + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_n=k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\left[\mathbb{E}(X_n^2) - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}(X_n^2) + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1} \qquad \text{car } \mathbb{P}(X_n=1)=\frac{1}{n} \text{ et } ([X_n=k])_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ SCE et th} \\
&= \mathbb{E}(X_n^2) + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n)}$$

*

10. En déduire une expression de $\mathbb{V}(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Or
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{(n+1)^2}$$
donc
$$\mathbb{E}(X_{n+1})^2 = \mathbb{E}(X_n)^2 + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_{n+1}) &= \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - \mathbb{E}(X_{n+1})^2 && \text{formule König Huygens}\\ &= \mathbb{E}(X_n)^2 + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1} - \left(\mathbb{E}(X_n^2) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n)\right)\\ &= \mathbb{V}(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{V}(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

Par télescopage et comme $\mathbb{V}(X_1) = 0$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}}$$

La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

donc
$$\mathbb{V}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$

*

## Exercice 2.

### I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

Soit $\lambda$ un réel.

1. Donner, en fonction de $\lambda$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$.

   On fera une distinction de cas suivant le signe de $\lambda$.

RÉPONSE:

**Remarque : rapport** Cette question a souvent été abordée mais par manque de rigueur peu de candidat·e·s ont eu tous les points. Est souligné notamment les problèmes de rédaction sur la forme des solutions
L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est

$$X^2 + \lambda = 0$$

**cas** $\lambda > 0$ L'équation caractéristique a deux racines distinctes $\pm i\sqrt{\lambda}$

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 0 \text{ les solutions de l'équation sont exactement les fonctions } t \mapsto A\cos(t\sqrt{\lambda}) + B\sin(t\sqrt{\lambda}) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des réels}}$$

**cas** $\lambda = 0$ L'équation caractéristique a une racine double 0

$$\boxed{\text{Si } \lambda = 0 \text{ les solutions de l'équation sont exactement les fonctions } t \mapsto A + Bt \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des réels}}$$

**cas** $\lambda < 0$ L'équation caractéristique a deux racines distinctes $\pm\sqrt{-\lambda}$

$$\boxed{\text{Si } \lambda < 0 \text{ les solutions de l'équation sont exactement les fonctions } t \mapsto A\exp(t\sqrt{-\lambda}) + B\sin(-t\sqrt{-\lambda}) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des réels}}$$

*

2. Déterminer, en fonction de $\lambda$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. On fera une distinction de cas suivant le signe de $\lambda$.

RÉPONSE:

**cas** $\lambda > 0$

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(1) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos(0) + B\sin(0) & = 0 \\ A\cos(\sqrt{-\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\cos(0) & = 0 \\ B\sin(\sqrt{\lambda}) & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda > 0 \text{ et } \sqrt{\lambda} \equiv 0[\pi] \text{ les solutions de l'équation sont exactement les fonctions } t \mapsto B\sin(t\sqrt{\lambda}) \text{ où } B \text{ est un réel}}$

$\boxed{\text{Si } \lambda > 0 \text{ et } \sqrt{\lambda} \neq\equiv 0[\pi] \text{ l'unique solution est la fonction nulle}}$

**cas** $\lambda = 0$

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(1) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ A + B & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ B & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda = 0 \text{ l'unique solution est la fonction nulle}}$

**cas** $\lambda < 0$

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(1) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B & = 0 \\ A\exp(-\sqrt{-\lambda}) + B\exp(\sqrt{-\lambda}) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ B & = 0 \end{cases} \qquad \text{car } \exp(-\sqrt{-\lambda}) \neq \exp(\sqrt{-\lambda}) \text{ car } \sqrt{-\lambda} \neq 0$$

$\boxed{\text{Si } \lambda < 0\text{, l'unique fonction solution est la fonction nulle}}$

*

## II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

Dans cette partie, on étudie une discrétisation de l'équation différentielle avec conditions aux bords étudiée à la question précédente. Pour cela, on fixe un entier $N$ supérieur ou égal à deux et une fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on pose $x_k = f(k/N)$.

Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $f''(k/N)$ est approximé par :

$$\frac{\frac{x_{k+1}-x_k}{1/N} - \frac{x_k - x_{k-1}}{1/N}}{1/N} = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2}$$

On se ramène ainsi à chercher des réels $x_0, \ldots, x_N$ tels que :

$$x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!], \qquad \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2} + \lambda x_k = 0. \tag{*}$$

On note $\Lambda$ l'ensemble des réels $\lambda$ tel qu'il existe des réels $x_0, \ldots, x_N$ non tous nuls vérifiant (*).

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une matrice $M_{N-1,\lambda} \in \mathscr{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ telle que des réels $x_0, \ldots, x_N$ vérifient $(*)$ si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $M_{N-1,\lambda}$ et[4] $x_0 = x_N = 0$.

RÉPONSE:

On commence par constater que pour $k = 1$, en considérant les conditions aux bord, la relation(*) s'écrit

$$\frac{x_2 - 2x_1}{1/N^2} + \lambda x_1 = 0$$

de même

$$\frac{-2x_{N-1} + x_{N-1}}{1/N^2} + \lambda x_{N-1} = 0$$

On pose

$$\boxed{M_{N-1,\lambda} = N^2 \left(A_{N-1} - 2I_{N-1}\right) + \lambda I_{N-1}}$$

*

Pour tout entier $n$ non nul, on considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

4. erreur d'énoncé

4. Déterminer une relation entre $\Lambda$ et l'ensemble des valeurs propres de $A_{N-1}$.

RÉPONSE:

$\lambda \in \Lambda$ si et seulement si il existe $X_{N-1}$ matrice colonne de taille $N-1$ non nulle telle que

$$M_{N-1}X_{N-1} = 0$$

ce qui revient à écrire

$$\left(A_{N-1} - \left(2 - \frac{\lambda}{N^2}\right) I_{N-1}\right) X_{N-1} = 0$$

ce qui revient à dire que $2 - \dfrac{\lambda}{N^2}$ est valeur propre de $A_{N-1}$

$$\boxed{\Lambda = \left\{N^2(2-\mu)/\mu \in \mathrm{Sp}(A_{N-1})\right\}}$$

*

5. Justifier que pour tout entier $n$ non nul, la matrice $A_n$ est diagonalisable et en déduire que le cardinal de $\Lambda$ est inférieur ou égal à $N-1$.

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{La matrice est symétrique } \textbf{réelle} \text{ elle est donc diagonalisable (dans une base orthonormale)}}$$

Nous n'avons pas besoin du résultat précédent pour affirmer que le nombre de valeurs propres d'une matrice est toujours inférieur à sa taille.

$$\text{Card } (\mathrm{Sp}(A_{N-1}) \leqslant N-1$$

$$\boxed{\text{Card } \Lambda \leqslant N-1}$$

**Remarque :** Comme la fonction $t \mapsto N^2(2-t)$ est injective il y a égalité des cardinaux de $\Lambda$ et $\mathrm{Sp}(A_{N-1})$.

*

6. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A_3 = PDP^{-1}$.

RÉPONSE:

Après calcul

$$\boxed{A_3 = PDP^{\mathrm{T}} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a choisi une base de vecteurs propres orthonormale

*

7. Prouver qu'un réel $\mu$ est valeur propre de $A_{N-1}$ si, et seulement s'il existe une suite $v$ non nulle vérifiant $v_0 = v_N = 0$ et, pour tout entier $n$, $v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$.

RÉPONSE:

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe une suite $v$ non nulle telle que

$$v_0 = 0 \qquad v_N = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_{n+1} + v_{n-1} = \mu v_n$$

On a notamment au bord

$$v_2 = \mu v_1 \qquad v_{N-2} = \mu v_N$$

On pose alors

$$X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}$$

ce vecteur est non nul car la suite est non nulle et comme $v_0 = 0$, si $v_1 = 0$ alors d'après le théorème du cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, la suite serait constante égale à 0. Donc $v_1 \neq 0$. De plus

$$A_{N-1}X = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 + v_3 \\ v_2 + v_4 \\ \vdots \\ v_{N-3} + v_{N-1} \\ v_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \\ \mu v_3 \\ \vdots \\ \mu v_{N-2} \\ \mu v_{N-1} \end{pmatrix} = \mu X$$

On a donc démontré que $X$ est vecteur propre de $A_{N-1}$ associé à la valeur propre $\mu$

$\Rightarrow$ Supposons que $X$ soit vecteur propre de $A_{N-1}$ associé à la valeur propre $\mu$, on note

$$X = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix}$$

Alors comme précédemment

$$A_{N-1}X = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 + w_3 \\ w_2 + w_4 \\ \vdots \\ w_{N-3} + w_{N-1} \\ w_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu w_1 \\ \mu w_2 \\ \mu w_3 \\ \vdots \\ \mu w_{N-2} \\ \mu w_{N-1} \end{pmatrix} = \mu X$$

de plus $X$ non nul, si $w_1 = 0$ alors par substitutions successives on montre que $w_2 = 0 = w_3 \cdots = w_{N-1}$ ce qui est impossible car$X$ est non nul.
On pose[5] alors $v$ l'unique suite définie par

$$v_0 = 0 \qquad v_1 = w_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$$

- Cette suite est non nulle car $w_1 = 0$
- On démontre par récurrence (finie) que

  $$\forall n \in [\![1, N-1]\!] \qquad w_n = v_n$$

  et donc en utilisant la dernière ligne de de l'égalité matricielle $A_{N-1}X = \mu X$

  $$v_N = \mu v_{N-1} - v_{N-2} = \mu w_{N-1} - w_{N-2} = 0$$

  On a donc construit une suite $v$ qui vérifie

  $$v_0 = v_N = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} + v_n = \mu u_{n+1}$$

*

8. On fixe $\mu$ un réel et on considère une suite $u$ telle que pour tout entier $n$, on ait : $u_{n+2} = \mu u_{n+1} - u_n$.

   (a) On suppose que $|\mu| > 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors $u$ est la suite nulle.

5. Les théorèmes de première année sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 assure l'existence et l'unicité de cette suite

RÉPONSE:

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est

$$X^2 - \mu X + 1$$

Son discriminant est $\Delta = \mu^2 - 4$. Si $|\mu| > 2$ alors $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique admet pour solution deux réels $r_1$ et $r_2$

$$r_1 = \frac{\mu - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad r_2 = \frac{\mu + \sqrt{\Delta}}{2}$$

on remarque que $r_1 \neq r_2$ et $r_1 \neq -r_2$ car $r_1 + r_2 = \mu > 0$ D'après le cours il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

Les conditions au bord impose

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_N & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B & = 0 \\ Ar_1^N + Br_2^N & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A & = -B \\ Ar_1^N - Ar_2^N & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A & = -B \\ A & = 0 \end{cases} \qquad \text{car (rapport) } r_1^N \neq r_2^N \text{ car } r_1 \neq 0 \text{ et(rapport) } r_1 \neq -r_2$$

La suite nulle est bien solution

$$\boxed{\text{La seule solution est la suite nulle}}$$

*

(b) On suppose que $|\mu| = 2$. Prouver que si $u_0 = u_N = 0$, alors $u$ est la suite nulle.

RÉPONSE:

Si $|\mu| = 2$ alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique admet pour unique solution le réel non nul $r_0 = \dfrac{\mu}{2}$ D'après le cours il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_0^n + Bnr_0^n$$

Les conditions au bord imposent

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_N &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ Ar_0^N + BNr_0^N &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ BNr_0^N &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ B &= 0 \end{cases} \qquad \text{car } r_0 \neq r \quad N \neq 0$$

La suite nulle est bien solution

$$\boxed{\text{La seule solution est la suite nulle}}$$

*

(c) On suppose que $|\mu| < 2$.

i. Prouver que le polynôme $X^2 - \mu X + 1$ a ses racines conjuguées et de module 1 . On les note $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Dans ce cas là les deux solutions de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = \frac{\mu - i\sqrt{-\Delta}}{2} \qquad r_2 = \frac{\mu - i\sqrt{+\Delta}}{2}$$

Cette forme montre que les deux solutions sont conjuguées, on peut aussi rappeler le théorème du cours qui affirme que les racines complexes d'un polynôme à coefficients **réels** sont conjuguées.

$$\begin{aligned} |r_1| &= \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{\sqrt{-\Delta}^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu^2 - \Delta}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu^2 - \mu^2 + 4}{4}} \\ &= 1 \\ &= |r_2| \qquad \text{racines conjuguées} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les deux racines de l'équation caractéristique sont conjuguées de module 1.}}$$

On peut aussi remarquer que les relations coefficients racines implique, dans ce cas là que

$$r_1 r_2 = 1$$

or on vient de démontrer que $r_2 = \overline{r_1}$ donc

$$|r_1|^2 = r_1\overline{r_1} = 1$$

*

ii. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\theta$ pour que $\mu$ soit valeur propre de $A_{N-1}$.

RÉPONSE:

Il existe alors deux réels $A$ et $B$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = A1^n\cos(n\theta) + B1^n\sin(n\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$$

Les conditions au bord imposent

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_N & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ B\sin(N\theta) & = 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = B\sin(n\theta)$$

$\mu$ est valeur propre de $A_{N-1}$ si et seulement si il existe une suite non nulle qui vérifie ces conditions donc

$\mu$ est valeur propre de $A_{N-1}$ si et seulement si il existe une solution $B$ non nulle

$$\boxed{\mu \text{ est valeur propre de } A_{N-1} \text{ si et seulement si } \sin(N\theta) = 0}$$

*

iii. En déduire que $A_{N-1}$ possède $N-1$ valeurs propres distinctes.

RÉPONSE:

Les solutions de l'équation $\sin(N\theta) = 0$ sont les réels $\theta = \dfrac{k\pi}{N}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ Les relations coefficients / racines donnent

$$\mu = r_1 + r_2 = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

On doit avoir aussi $|\mu| < 2$ Les valeurs propres sont les réels

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \qquad k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \cos(\theta) \neq 0$$

La fonction cosinus étant $2\pi$ périodique et paire sur $\mathbb{R}$ et injective que $[0;\pi]$

$$\boxed{\text{Les } N-1 \text{ valeurs propres de } A_{N-1} \text{ sont les } N-1 \text{ réels distincts } 2\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \text{ pour } k \in [\![1, n-1]\!]}$$

*

9. En déduire $\Lambda$.

RÉPONSE:

D'après la question 4

$$\boxed{\Lambda = \left\{ N^2\left(2-2\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right) \Big/ k \in [\![1, N-1]\!] \right\}}$$

Comme la fonction $t \mapsto 2 - \lambda/N^2$ est injective, nous avons trouvé $N-1$ valeurs propres distinctes

*

10. Soit $k$ un entier fixé. Trouver la limite de $\dfrac{2-2\cos(k\pi/N)}{1/N^2}$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

**Attention : rapport** beaucoup d'erreur de manipulation d'équivalents !

On sait que

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{k\pi}{N} = 0$$

donc

$$1-\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{(k\pi)^2}{2N^2}$$

donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{2-2\cos(k\pi/N)}{1/N^2} = (k\pi)^2}$$

*

11. Relier ce résultat à celui obtenu à la question 2 .

RÉPONSE:

Quand $N$ devient très grand les conditions d'existence de solution sont les mêmes

*

## III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

On considère un réel $\lambda$ et $b$ une fonction définie sur $[0;1]$ et l'on recherche les fonctions $f$ solutions de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = b$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

On fixe un entier $N$ supérieur ou égal à deux et, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on pose $b_k = b(k/N)$.

En discrétisant l'équation, on est ramené à chercher des réels $x_0, \ldots, x_N$ tels que :

$$x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!], \qquad \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{(1/N)^2} + \lambda x_k = b_k. \tag{*}$$

ce qui se réécrit matriciellement :

$$x_0 = x_N = 0 \quad \text{et} \quad M_{N-1,\lambda} X = B, \text{ en posant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix} \tag{**}$$

On admet que $M_{N-1,\lambda}$ a $N-1$ valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_{N-1}$ données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!] \quad \mu_k = \lambda/N^2 - 2 + 2\cos(k\pi/N)$$

12. Prouver que si $\lambda < 0$, alors (**) a une unique solution.

RÉPONSE:

Si $\lambda < 0$ alors comme $\cos(x) \in [-1;1]$

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!] \quad \mu_k < 0$$

donc 0 n'est pas valeur propre de $M_{N-1}$ ce qui prouve que $M_{N-1}$ est inversible et donc l'unique solution est

$$X = M_{N-1}^{-1} B$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda < 0, \text{ alors (**) a une unique solution.}}$$

*

On considère la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonnes de taille $N-1$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$, alors sa norme est égale à :

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} x_k^2}$$

Comme le produit matriciel $X^{\mathrm{T}} X$ est égal à la matrice de taille $1 \times 1$ :

$$\left(x_1^2+\cdots+x_{N-1}^2=\sum_{k=1}^{N-1}x_k^2\right)$$

on notera $\|X\|^2=X^{\mathrm{T}}X$, en identifiant le réel $\|X\|^2$ et la matrice $\left(\|X\|^2\right)$.

On suppose dans la suite que $\lambda<0$ et on considère $B$ et $\tilde{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$. On note $X$ et $\tilde{X}$ les matrices colonnes telles que $M_{N-1,\lambda}X=B$ et $M_{N-1,\lambda}\tilde{X}=\tilde{B}$.

13. Soit $D$ une matrice diagonale $D$ de taille $N-1$ de coefficients diagonaux notés $d_1,\cdots,d_{N-1}$. Exprimer $\|DX\|$ en fonction des coefficients de $D$ et $X$.

RÉPONSE:

On note

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & d_{N-2} & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{N-1}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_{N-1})$$

Donc

$$DX=\begin{pmatrix} d_1x_1\\ \vdots\\ d_{N-1}x_{N-1}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|DX\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1}d_i^2x_i^2}}$$

*

14. Prouver que $\|B\|\leqslant-\mu_{N-1}\|X\|$.

RÉPONSE:

On sait que $M_{N-1}$ est symétrique **réelle** son diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice $P$ inversible telle que

$$M_{N-1}=P\Delta P^{\mathrm{T}}\qquad \Delta=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_{N-1})$$

Or $B = M_{N-1}X$

$$\begin{aligned}
\|B\|^2 = \|MX\| &= \left\|P\Delta P^{\mathrm{T}}X\right\|^2 \\
&= \left(P\Delta P^{\mathrm{T}}X\right)^{\mathrm{T}} P\Delta P^{\mathrm{T}}X \\
&= X^{\mathrm{T}}P\Delta^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\Delta P^{\mathrm{T}}X \\
&= X^{\mathrm{T}}P\Delta P^{\mathrm{T}}P\Delta P^{\mathrm{T}}X \\
&= X^{\mathrm{T}}P\Delta^2 P^{\mathrm{T}}X && \text{car } P^{-1} = P^{\mathrm{T}} \\
&= \left\|\Delta P^{\mathrm{T}}X\right\|^2 \\
&= \|\Delta Y\|^2
\end{aligned}$$

En notant

$$Y = P^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots\, y_{N-1} \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente

$$\|\Delta Y\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i^2 y_i^2$$

De plus, sur $]0;\pi]$ la fonction $t \mapsto \cos(t)$ est strictement décroissante à valeur dans $[-1;1[$ donc

$$\mu_{N-1} < \mu_{N-2} < \cdots < \mu_1 < 0$$

Ce qui redémontre que la matrice $M_{N-1} \in \mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$ qui a $N-1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable. Donc

$$\mu_{N-1}^2 > \mu_{N-2}^2 > \cdots > \mu_1^2 > 0$$

donc

$$\|\Delta Y\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 \tag{E.1}$$

Donc

$$\|\Delta Y\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \|Y\|^2$$

On a donc

$$\|B\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \|Y\|^2$$

Or

$$\begin{aligned}
\|Y\|^2 &= (P^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}X \\
&= X^{\mathrm{T}}PP^{\mathrm{T}}X \\
& X^{\mathrm{T}}X && \text{car } P^{\mathrm{T}} = P^{-1} \\
&= \|X\|^2
\end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$\|B\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \|X\|^2$$

En passant à la racine, toutes les normes étant positives

$$\|B\| \leqslant |\mu_{N-1}| \, \|X\|$$

et comme $\mu_{N-1} < 0$, $|\mu_{N-1}| = -\mu_{N-1}$

$$\boxed{\|B\| \leqslant -\mu_{N-1} \|X\|.}$$

*

15. Prouver que $\|X - \tilde{X}\| \leqslant -\frac{1}{\mu_1} \|B - \tilde{B}\|$.

RÉPONSE:

Dans le raisonnement précédent on peut compléter l'inégalité (E.1) par

$$\mu_1^2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 \leqslant \|\Delta Y\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2$$

Ce qui démontrerait en suivant les même étapes

$$\mu_1^2 \, \|Y\|^2 \leqslant \|B\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \, \|Y\|^2$$

Puis

$$\mu_1^2 \, \|X\|^2 \leqslant \|B\|^2 \leqslant \mu_{N-1}^2 \, \|X\|^2$$

et finalement

$$-\mu_1 \, \|X\| \leqslant \|B\| \leqslant \mu_{N-1} \, \|X\|$$

donc

$$\|X\| \leqslant -\frac{1}{\mu_1} \, \|B\| \tag{E.2}$$

On a

$$M_{N-1} X = B \qquad M_{N-1} \tilde{X} = \tilde{B}$$

donc

$$M_{N-1} \tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{B}} \qquad \tilde{\tilde{X}} = X - \tilde{X} \qquad \tilde{\tilde{B}} = B - \tilde{B}$$

En appliquant l'inégalité (E.2) à $\tilde{\tilde{X}} = X - \tilde{X}$

$$\left\| X - \tilde{X} \right\| \leqslant -\frac{1}{\mu_1} \left\| B - \tilde{B} \right\|$$

$$\boxed{\|X - \tilde{X}\| \leqslant -\frac{1}{\mu_1} \|B - \tilde{B}\|.}$$

*

16. On suppose que $B$ n'est pas la matrice nulle.

Justifier que l'on a l'inégalité $(I)$ : $\dfrac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|} \leqslant \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} \frac{\|B-\tilde{B}\|}{\|B\|}$.

RÉPONSE:

$X$ et $B$ étant non nulles $\|X\| \neq 0$ et $\|B\| \neq 0$ (rapport)
Toutes les quantités étant strictement positives, on obtient par (E.1)

$$\frac{1}{\|X\|} \leqslant -\mu_{N-1} \|B\|$$

en multipliant par l'inégalité précédente

$$\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|} \leqslant \frac{-\mu_{N-1}}{-\mu_1} \frac{\|B-\tilde{B}\|}{\|B\|}$$

$$\boxed{\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\mu_{N-1}}{\mu_1} \frac{\|B-\tilde{B}\|}{\|B\|}.}$$

*

17. Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = +\infty$.

RÉPONSE:

$$\frac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = \frac{\dfrac{\lambda}{(N-1)^2} - 2 + 2\cos\left((N-1)\pi/N\right)}{\lambda - 2 + 2\cos\left(\pi/N\right)}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \cos\left((N-1)\pi/N\right) = \cos(\pi) = -1$$

donc comme $\lambda < 0$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\lambda}{(N-1)^2} - 2 + 2\cos\left((N-1)\pi/N\right) = -\infty$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \lambda - 2 + 2\cos\left(\pi/N\right) = \lambda - 2 + 2 = \lambda$$

et comme $\lambda < 0$

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = +\infty.}$$

*

18. Prouver qu'il existe des matrices $B$ et $\tilde{B}$ distinctes telles que ( $I$ ) soit une égalité.
19. Quel problème numérique cela peut-il poser ?

FIN DU SUJET