Correction du devoir surveillé n° 6

Problème 1

PARTIE I : Étude d'une première variable aléatoire

1. a) À l'aide des événements introduits on a :

$$[X=0]=\overline{F_1}\cap\overline{F_2},\qquad [X=1]=\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3}\right)\cup\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap\overline{F_3}\right),$$
$$[X=2]=\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3\cap\overline{F_4}\right)\cup\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap F_3\cap\overline{F_4}\right)\cup\left(F_1\cap F_2\cap\overline{F_3}\cap\overline{F_4}\right).$$

Les lancers étant indépendants, $P(X=0)=P(\overline{F_1})\times P(\overline{F_2})=\dfrac{4}{9}$.

$[X=1]$ s'écrit comme une union de deux événements incompatibles et toujours grâce à l'indépendance des lancers :

$$P(X=1)=P\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3}\right)+P\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap\overline{F_3}\right)=\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{8}{27}.$$

De même pour $[X=2]$, on a : $P(X=2)=3\times\dfrac{4}{3^4}=\dfrac{4}{27}$.

En résumé, $\boxed{P(X=0)=\dfrac{4}{9},\ P(X=1)=\dfrac{8}{27},\ P(X=2)=\dfrac{4}{27}.}$

b) Pour $n\geqslant 3$:

$$[X=n]=\bigcup_{i=1}^{n+1}\left(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{i-1}\cap\overline{F_i}\cap F_{i+1}\cap\ldots\cap F_{n+1}\cap\overline{F_{n+2}}\right).$$

L'événement $[X=n]$ s'écrit comme une union d'événements incompatibles deux à deux et les lancers sont indépendants. Donc

$$\begin{aligned}P(X=n)&=\sum_{i=1}^{n+1}P(F_1)\times P(F_2)\times\ldots\times P(F_{i-1})\times P(\overline{F_i})\times P(F_{i+1})\times\ldots\times P(F_{n+1})\times P(\overline{F_{n+2}})\\&=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{4}{9}\times\frac{1}{3^n}=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.\end{aligned}$$

La formule étant bien valable pour $n=0$, 1, ou 2, on a bien $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=(n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}.}$

PARTIE II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. a) Comme X peut prendre comme valeur n'importe quel entier naturel on a $\boxed{U(\Omega)=\mathbb{N}.}$

b) Sachant que l'événement $[X=n]$ est réalisé, l'expérience réalisée est de tirer au hasard une boule dans une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On est dans le cadre d'une loi uniforme.

On a donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P_{[X=n]}(U=k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } k\in[\![0;n]\!]\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}.}$

c) Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement $[U=k]$ avec le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}P(U=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)P_{[X=n]}(U=k)\\&=\sum_{n=0}^{k-1}P(X=n)\underbrace{P_{[X=n]}(U=k)}_{=0}+\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=n)P_{[X=n]}(U=k)\\&=0+\sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}\times\frac{1}{n+1}=\frac{4}{9}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

On reconnait la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, cette somme existe bien et vaut $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^k} \times \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2 \times 3^{k-1}}$. On a donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(U=k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$

d) On sait que U admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum kP(U=k)$ est absolument convergente. La série étant à termes positifs, il suffit d'étudier la convergence de la série. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kP(U=k) = \frac{2}{9} \times k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

On reconnait le terme général de la série dérivée première de la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ cette série est bien convergente donc U admet une espérance. De plus

$$E(U) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{U \text{ admet une espérance et } E(U) = \frac{1}{2}.}$

U admet une variance si, et seulement si, U^2 admet une espérance, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum k^2P(U=k)$ est convergente.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k^2P(U=k) = \frac{2}{3}\left(k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + k\left(\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

On voit apparaitre les termes généraux des séries dérivée et dérivée seconde de la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ ces séries sont convergentes donc U^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \frac{2}{27}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser la valeur de la somme $\sum k^2q^k$ si on la connait.

D'après la formule de Kœnig-Huygens, $\boxed{U \text{ admet une variance et } V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{3}{4}.}$

3. a) U et X prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ mais on a forcément $U \leqslant X$. Donc $\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. On a $P_{[X=n]}(V=j) = P_{[X=n]}(U=n-j)$.

Donc $\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ P_{[X=n]}(V=j) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$

c) La loi conditionnelle de V sachant $[X=n]$ est identique à celle de U sachant $[X=n]$. Donc U et V suivent la même loi.

$\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall j \in \mathbb{N},\ P(V=j) = \frac{2}{3^{j+1}}.}$

4. Soit $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} P([U=k]\cap[V=j]) &= P([U=k]\cap[X=k+j]) = P(X=k+j)P_{[X=k+j]}(U=k) \\ &= \frac{4(k+j+1)}{3^{k+j+2}} \times \frac{1}{k+j+1} \\ &= \frac{4}{3^{k+j+2}} = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} = P(U=k)\times P(V=j). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$

5. Comme U et V sont indépendantes $\boxed{\operatorname{cov}(U,V)=0.}$
D'après les propriétés de la covariance

$$\operatorname{cov}(X,U) = \cos(U+V,U) = \operatorname{cov}(U,U) + \operatorname{cov}(V,U) = V(U) + \operatorname{cov}(U,V).$$

Donc $\boxed{\operatorname{cov}(X,U) = \frac{3}{4}.}$

Partie III : Étude d'un jeu

6. a)
```
from random import random

def simule_X():
    nb_pile=0
    k=0 #compteur des lancers
    while nb_pile!=2:
        k+=1
        if random()<2/3:
            nb_pile+=1
    return k-2 #nb de Face obtenus dans les k lancers
```
b) La fonction `mystere` calcule et renvoie une estimation de la probabilité que A gagne le jeu car on effectue N fois le jeu et r calcule le nombre moyen de parties gagnées par A.

c) Dans cette fonction, à chaque étape de la boucle `for` on calcule $\frac{1}{N}$ ce qui n'est pas très astucieux. On peut donc améliorer la fonction de la façon suivante :
```
def mystere_bis(p):
    r=0
    N=10**4
    for k in range(N):
        x=simule_X()
        y=simule_Y(p)
        if x<=y:
            r=r+1
    return r/N #On divise une seule fois par N
```
d) On cherche sur ce graphe pour quelle valeur $P(A)$ vaut environ $0,5$. Il semble que $\boxed{p \approx 0,8.}$

7. a) On effectue une succession illimitée d'expériences identiques et indépendantes et Z désigne le rang d'apparition pour la première fois de l'événement "obtenir Pile" qui est un événement de probabilité p à chaque expérience.

On reconnait donc que $\boxed{Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p : Z(\Omega)=\mathbb{N}^*,\ P(Z=j)=(1-p)^{j-1}\times p.}$

D'après notre cours $\boxed{Z \text{ admet une espérance et une variance et } E(Z)=\frac{1}{p} \text{ et } V(Z)=\frac{1-p}{p^2}.}$

b) On remarque que $\boxed{Y = Z-1.}$

Par linéarité de l'espérance on en déduit que $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y)=E(Z-1)=\frac{1}{p}-1.}$

D'après les propriétés de la variance, $\boxed{Y \text{ admet une variance et } V(Y)=V(Z)=\frac{1-p}{p^2}.}$

c) L'événement $[Y \geqslant n]$ signifie que lorsqu'on a obtenu le premier Pile il y a eu au moins n Face. Cela signifie donc que les n premiers lancers ont donné Face.

$$[Y \geqslant n] = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

Comme les lancers sont indépendants on obtient bien que $\boxed{P(Y \geqslant n) = (1-p)^n.}$

8. a) On peut remarquer que $[X \leqslant Y] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n] \cap [Y \geqslant n]$.

L'événement $[X \leqslant Y]$ s'écrit comme une union d'événements deux à deux incompatibles donc, d'après l'axiome de σ-additivité : $P([X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n] \cap [Y \geqslant n])$.

Les variables X et Y étant indépendantes on obtient bien $\boxed{P([X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P([Y \geqslant n]).}$

b) D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
P([X \leqslant Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n = \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \qquad \text{car } \left|\frac{1-p}{3}\right| \leqslant \frac{1}{3} < 1 \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

c) L'événement $[X \leqslant Y]$ signifie que A gagne.

On veut que le jeu soit équilibré, c'est-à-dire que cette probabilité soit égale à $\frac{1}{2}$. On cherche donc p tel que :

$$\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2+p)^2 = 8 \Leftrightarrow p = \pm 2\sqrt{2} - 2.$$

p étant positif, le jeu est donc équilibré pour $\boxed{p = 2\sqrt{2} - 2.}$

Problème 2

Partie 1 : diagonalisation de J

1. J est une matrice **réelle** symétrique, elle est donc diagonalisable en base orthonormale. Il existe P une matrice de passage entre deux bases orthonormée et D une matrice diagonale telle que

$$J = PDP^{-1}$$

L'indication de l'énoncé nous permet d'affirmer que $P^{-1} = P^T$.

$$\boxed{\text{Il existe } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telle que } J = PDP^T}$$

2. a) Le rang de J est le rang de la famille des vecteurs colonnes. Comme toutes ces colonnes sont identiques

$$\mathrm{rg}(J) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

car cette colonne est non nulle.

$$\boxed{\mathrm{rg}(J) = 1}$$

b) Comme $n \geqslant 2$, cela démontre que $n \neq \mathrm{rg}(J)$. La matrice $J = J - 0I$ n'est pas inversible.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J.}$$

De plus le sous espace propre associé à 0 est

$$E_0(J) = \mathrm{Ker}(J - 0I) = \mathrm{Ker} J$$

Le théorème du rang pour les matrices prouve que

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(J)) + \mathrm{rg}(J).$$

$$\text{Donc } \boxed{\dim(E_0) = n - 1.}$$

3. a) $\boxed{JU = nU.}$ Comme U est non nul cela prouve que n est une valeur propre de J et que U est un vecteur propre associé à cette valeur propre :

$$\boxed{n \in \mathrm{Sp}(J).}$$

b) $E_n(J)$, le sous-espace propre associé à n, est de dimension au moins 1 car $U \in E_n(J)$. De plus la somme des dimensions des sous espaces propres est inférieure à la taille de la matrice, donc

$$\dim(E_0(J)) + \dim(E_n(J)) \leqslant n$$

donc

$$n - 1 + \dim(E_n(J)) \leqslant n$$

et donc

$$\dim(E_n(J)) \leqslant 1.$$

$$\text{En conclusion } \boxed{\dim(E_n(J)) = 1.}$$

4. La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure à la taille de la matrice, or

$$\dim(E_0(J)) + \dim(E_n(J)) = n$$

il ne peut donc pas y avoir d'autres valaurs propres

$$\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}.}$$

Partie II : optimisation sous contrainte

5. a) Comme 0 ne peut pas être valeur propre, A est forcément inversible.

b) A est symétrique **réelle** donc elle est diagonlaisable dans une base orthonormale et comme dans la première partie

$$\boxed{\text{Il existe } Q \text{ inversible et } \Delta \text{ diagonale telle que } A = Q\Delta Q^T}$$

6. Notons $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale. Les coefficients diagonaux de Δ sont exactement les valeurs propres de A, ils sont donc tous strictement positifs. Posons

$$\Lambda = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad \text{et } B = Q\Lambda Q^T$$

alors

$$\begin{aligned}
B^2 &= Q\Lambda Q^T Q\Lambda Q^T \\
&= Q\Lambda^2 Q^T && \text{car } Q^T = Q^{-1} \\
&= Q\text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}^2, \sqrt{\lambda_2}^2, \ldots, \sqrt{\lambda_n}^2\right) Q^T && \text{produit matrices diagonales} \\
&= Q\Delta Q^T = B
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } B = Q\Lambda Q^T\ .}$$

Remarque : *Il n'y a pas unicité les 2^n matrices suivantes conviennent*

$$\Lambda = \mathit{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}) \qquad \textit{et } B = Q\Lambda Q^T$$

Si on impose que tous les coefficients de Λ soient positifs, il y a unicité de la solution.
Λ est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, elle est donc inversible, Comme Q et Q^T le sont aussi, par produit

$$\boxed{B \text{ est une matrice inversible.}}$$

$$\begin{aligned}
B^T &= \left(Q\Lambda Q^T\right)^T \\
&= \left(Q^T\right)^T \Lambda^T Q^T \\
&= Q\Lambda Q^T && \text{une matrice diagonale est symétrique}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B \text{ est une matrice symétrique.}}$$

7. a) En notant X la matrice colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base canonique

$$\begin{aligned}
< u(\vec{x}), \vec{x} > &= (AX)^T X \\
&= X^T A^T X && \text{propriétés de la transposée} \\
&= X^T A X && A \text{ est symétrique} \\
&= X^T B^2 X && \text{définition de } B \\
&= X^T B^T B X && B \text{ est symétrique} \\
&= (BX)^T (BX) \\
&=< v(\vec{x}),\ v(\vec{x}) > && B \text{ est la matrice de } v \text{ dans la base canonique} \\
&= \|v(\vec{x})\|^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ < u(\vec{x}), \vec{x} >= \|\vec{x}\|^2\ .}$$

b) Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on note X et Y les matrices des coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique. Comme $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^2$, un raisonnement analogues au précédent donne

$$< u^{-1}(\vec{y}),\ \vec{y} >= \|v^{-1}(\vec{y})\|^2$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz permet de montrer que

$$< v(\vec{x}),\ v^{-1}(\vec{y}) >^2 \leqslant \|v(\vec{x})\|^2 \times \|v^{-1}(\vec{y})\|^2$$

et en utilisant les deux résultats précédents

$$< v(\vec{x}),\ v^{-1}(\vec{y}) >^2 \leqslant < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{y}),\ \vec{y} >$$

Or

$$\begin{aligned} < v(\vec{x}),\ v^{-1}(\vec{y}) > &= (BX)^T B^{-1} Y \\ &= X^T B^T B^{-1} Y \\ &= X^T B B^{-1} Y && B \text{ est symétrique} \\ &= X^T Y \\ &=< \vec{x},\ \vec{y} > . \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (< \vec{x},\ \vec{y} >)^2 \leqslant < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{y}),\ \vec{y} > .}$$

c) Il y a égalité dans la version l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée dans la question précédente si et seulement si $v(\vec{x})$ et $v^{-1}(\vec{y})$ sont colinéaires. Par exemple cherchons $\vec{y}$ tel que $v(\vec{x}) = v^{-1}(\vec{y})$, ce qui est équivalent à $y = v^2(\vec{x}) = u(\vec{x})$. Comme tous les autres calculs de la réponse précédente sont des égalités

$$\boxed{\text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ en posant } \vec{y} = u(\vec{x}), \quad (< \vec{x},\ \vec{y} >)^2 =< u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{y}),\ \vec{y} > .}$$

8. En posant $\vec{y} = \vec{x}$ dans le résultat de la question 7b

$$\|\vec{x}\|^2 \leqslant < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} >$$

Si $\|\vec{x}\| = 1$

$$1 \leqslant < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} >$$

ce qui démontre que

$$\inf_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\|=1}} < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} > \geqslant 1$$

Soit $\vec{x}_0$ un vecteur propre (qui est donc non nul) associé à une valeur propre λ (qui est non nulle) de u, en notant $\vec{x}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{x}_0\|}\vec{x}_0$

$$\|\vec{x}_1\| = \frac{1}{\|\vec{x}_0\|}\|\vec{x}_0\| = 1$$

et $\vec{x}_1$ est un vecteur propre de u associé à λ

$$u(\vec{x}_1) = \lambda \vec{x}_1$$

donc en appliquant u^{-1} qui est une application linéaire

$$\vec{x}_1 = \lambda u^{-1}(\vec{x}_1)$$

donc

$$\frac{1}{\lambda}\vec{x}_1 = u^{-1}(\vec{x}_1)$$

$$\begin{aligned} < u(\vec{x}_1),\ \vec{x}_1 > \times < u^{-1}(\vec{x}_1),\ \vec{x}_1 > &= (\lambda < \vec{x}_1,\ \vec{x}_1 >)\left(\frac{1}{\lambda} < \vec{x}_1,\ \vec{x}_1 >\right) \\ &= \|\vec{x}_1\|^4 = 1^4 = 1. \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$\boxed{\inf_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\\ \|\vec{x}\|=1}} < u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} >= 1\ .}$$

9. **Étude d'un exemple**

a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients réels

$$\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= a \\ x + 2y &= b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= a \\ \quad\ \ y &= b - a \end{cases} && L_2 \Leftrightarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2a - b \\ \quad\ \ y &= b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} B
\end{aligned}$$

$$\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On peut aussi directement donner l'inverse de A à l'aide de la formule de l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 vue en sup.

b) Soit λ un réel

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ a un déterminant nul} \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Comme $5 < 9$, on obtient $\sqrt{5} < 3$ et donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ et par somme de réels strictement positifs $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$

$$\boxed{A \text{ possède deux valeurs propres strictement positives.}}$$

Remarques :

— On redémontre au passage que A est inversible.

— On ne demande pas de calculer les vecteurs propres associés et cela est inutile pour la suite.

— les deux solutions de $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, que l'on note λ_1 et λ_2 vérifient

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

ce qui permet de démontrer qu'elles sont de même signe et que leur somme est positive, donc

$$\lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 > 0$$

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique réelle dont l'une des valeurs propres est négative.

c) Soit $\vec{x}$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2). Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A

$$\begin{aligned}
< u(\vec{x}),\ \vec{x} > &= \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + x_2 x_1 + x_1 x_2 + 2x_2^2 \\
&= x_1^2 + 2x_2 x_1 + 2x_2^2
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
< u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} > &= \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x_1, x_2) =< u(\vec{x}),\ \vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{x}),\ \vec{x} >= 1$$

D'après la question 8

$$\boxed{g \text{ atteint un minimum de valeur 1 sur l'ensemble } \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}}$$

Partie III (BONUS) : Une deuxième optimisation sous contrainte

10. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \forall \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n, \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right]$$

est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

— Pour $n = 2$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, par définition de f.
De plus, $\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{2} x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^{2} x_k^2 \right] = \frac{1}{2} \left[(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \right] = \frac{1}{2} \times 2x_1 x_2 = x_1 x_2$.
Donc $\mathscr{P}(2)$ est vérifiée.

— Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée.
On a alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} x_i x_j &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} \\
&=
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2\right] &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{n+1}^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2x_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1}^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{n+1}^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2x_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1}\right)\right] && \text{Hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2}\left[2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} x_i x_j\right] && \text{remarque préliminaire}
\end{aligned}$$

Par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]}$$

11. On constate que l'unique matrice qui convient est la matrice dont tous les coefficients valent $1/2$ sauf les coefficients diagonaux qui valent 0

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

12. Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I, où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice étudiée ans la partie 1.

$$\boxed{M = \frac{1}{2}(J - I)}$$

Remarque

$$X^TJX = X^T\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i=1}^n x_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n x_i\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n\left(x_j\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\sum_{j=1}^n (x_j)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

$$X^TIX = X^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2$$

On peut ainsi retrouver le résultat de la première question.

13. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ' à déterminer telle que : D'après la première partie, et après avoir caculer le sprectre de J

$$J = PDP^T$$

avec D est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, O, 0)$ et P une matrice de changement de base orthonormé[1] On a aussi

$$I = PIP^T$$

donc

$$\frac{1}{2}(J - I) = P\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0, 0) - I\right)\right)P^T$$

$$\boxed{M = P\Delta'P^T \text{ avec } \Delta' = \mathrm{diag}\left(\frac{n-1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}\right)}$$

14. a)

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{S} &\Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 = 1\\
&\Leftrightarrow < \vec{x}, \vec{x} >= 1\\
&\Leftrightarrow X^TX = 1\\
&\Leftrightarrow (PY)^TPY = 1 && \text{car } Y = P^TX \qquad P^T = P^{-1}\\
&\Leftrightarrow Y^TP^TPY = 1\\
&\Leftrightarrow Y^Y = 1\\
&\Leftrightarrow < \vec{y}, \vec{y} >= 1\\
&\Leftrightarrow \vec{y} \in \mathscr{S}
\end{aligned}$$

1. pas forcément la même que dans la question 1

$$\boxed{\vec{x} \in \mathscr{S} \text{ si, et seulement si, } \vec{y} \in \mathscr{S}}$$

b) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne réelle de taille n tel que le vecteur $\vec{y}$ associé soit dans $\mathscr{S}$

$$\begin{aligned} Y^T \Delta Y &= \frac{n-1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} y_i \\ &= \frac{n}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \frac{n}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} && \text{car } \vec{y} \in \mathscr{S} \end{aligned}$$

Comme $\vec{y} \in \mathscr{S}$, $y_1 \in [-1;\ 1]$, donc

$$-\frac{1}{2} \leqslant Y^T \Delta Y \leqslant \frac{n-1}{2}$$

L'inégalité de gauche est une égalité pour $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est bien de norme 1.

L'inégalité de droite est une égalité pour $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est bien de norme 1

$$\boxed{\text{La valeur minimale de cet ensemble est } -\frac{1}{2}, \text{ sa valeur maximale } \frac{n-1}{2}}$$

c) Soit $\vec{x} \in \mathscr{S}$ et X la colonne de ses coordonnées dans la base canonique

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= X^T M X \\ &= X^T P \Delta' P^T X \\ &= Y^T \Delta' Y && \text{associativité, en posant } Y = P^T X \end{aligned}$$

En utiisant 14a, on constate que les valeurs du maximum et du minimum de f sur $\mathscr{S}$, correspondent aux valeurs calculées précédemment

$$\boxed{f \text{ admet comme valeur minimale sur } \mathscr{S}\ -\frac{1}{2} \text{ et comme valeur maximale } \frac{n-1}{2}.}$$