Devoir surveillé n° 6

30 mars 2024

Durée de l'épreuve : 3h

Indiquez en tête de votre copie si vous voulez connaître votre note lors du retour des copies ou après les écrits.

Si vous voulez recevoir votre copie par voie postale, n'oubliez pas de compléter l'enveloppe en indiquant votre adresse.

L'utilisation de la calculatrice, ou de tout autre appareil électronique (téléphone portable, ordinateur...), est ***interdite****.*

Le sujet comporte 2 problèmes indépendants. La partie "Bonus" du deuxième problème ne sera corrigée que si le reste de l'examen a été traité sérieusement.

Problème 1

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers indépendants avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre total de Face obtenus lorsque le deuxième Pile est obtenu.

On notera F_k l'événement « obtenir Face au k-ème lancer ».

1. a) Décrire, à l'aide des événements F_k, les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) = (n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession illimitée de lancers indépendants avec la pièce précédente. Puis en fonction du nombre n de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotés de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

   b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

   c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

   Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = n],\ n \in \mathbb{N})$.

   d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

   b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

   c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoire U et V sont indépendantes.

5. Que vaut la covariance du couple (U, V) ? En déduire $\text{cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

— le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; comme dans la partie I, X est la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

— le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

— le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction Python `simule_X`, ne prenant pas d'argument en entrée, qui simule la variable aléatoire X.

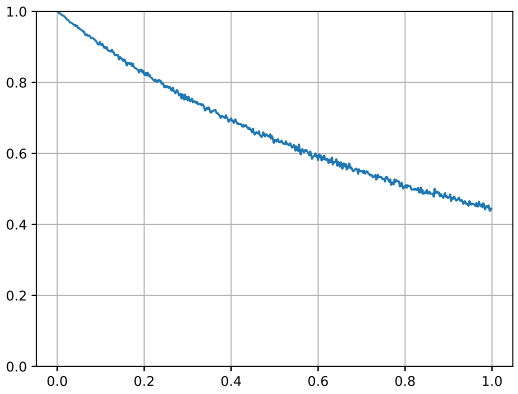
b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r+1/N
    return r
```

c) Proposer une modification de la fonction `mystere` de la question précédente qui diminue le temps d'exécution (justifier).

d)

On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe ci-contre.



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire Y**

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaitre la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. a) Montrer : $P([X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])P([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents une expression simplifiée de $P([X \leqslant Y])$ en fonction de p.

c) Déterminer alors la valeur exacte de p pour lequel le jeu est équilibré.

Problème 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . Pour tout élément $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si $\vec{x}$ est ainsi associé à X et $\vec{y}$ à Y, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y = Y^T X,$$

où X^T représente la transposée de X.

On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 .

Partie I : Diagonalisation de J

1. Justifier, sans calculs, qu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$J = PDP^T.$$

On admet que lorsque P est une matrice de passage d'une base orthonormée à une autre on a $P^{-1} = P^T$.

2. a) Déterminer le rang de J. (*Justifier la réponse.*)

b) En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

3. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de taille n dont tous les coefficients sont 1.

a) Calculer JU et en déduire une autre valeur propre de J.

b) Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ?

4. Quel est le spectre de J ? Justifier rapidement.

Partie II : Optimisation sous contrainte

Dans cette partie, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

5. a) Justifier que A est inversible.

b) Justifier que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice Q inversible et une matrice diagonale Δ telles que

$$A = Q\Delta Q^T.$$

6. Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (que l'on exprimera à l'aide de Q, Q^T et d'une matrice diagonale bien choisie) telle que $B^2 = A$ puis justifier que B est inversible et symétrique.

7. On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   a) Montrer que $< u(\vec{x}), \vec{x} >= \|v(\vec{x})\|^2$. *On pourra raisonner sur des produits matriciels.*
   b) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
   $$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2\,, \quad (< \vec{x},\vec{y} >)^2 \leqslant < u(\vec{x}),\vec{x} > \times < u^{-1}(\vec{y}),\vec{y} > .$$
   Indication : on pourra s'intéresser à $< v(\vec{x}), v^{-1}(\vec{y}) >$.
   c) Pour un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.
8. En déduire que :
   $$\inf_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\|=1}} (< u(\vec{x}),\vec{x} >) \times \left(< u^{-1}(\vec{x}),\vec{x} >\right) = 1$$
9. **Étude d'un exemple**
   On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
   c) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$g\,(x_1,x_2) = \left(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2\right)\left(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right)$$
   Déterminer le minimum de g sur l'ensemble $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Partie III (BONUS) : Une deuxième optimisation sous contrainte

On note f la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j.$$

10. Montrer par récurrence sur n que :
$$\forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2\right].$$
11. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x}) = X^T M X.$$
12. Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I, où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice étudiée ans la partie 1.
13. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ' à déterminer et une matrice P inversible (que l'on ne demande pas de déterminer) telles que :
$$M = P\Delta' P^T$$
14. On note
$$\mathscr{S} = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$
   a) Montrer que $\vec{x} \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, $\vec{y} \in \mathscr{S}$, où y désigne le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice des coordonnées dans la base canonique est $Y = P^T X$.
   b) Calculer le minimum et le maximum de l'ensemble
   $$\left\{Y^T\Delta' Y / y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1\right\}.$$
   c) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur l'ensemble $\mathscr{S}$ et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathscr{S}$.