PRÉPARATIONS AUX ÉPREUVES ORALES.
PARTIE II
RÉPONSES

SUJET 1 : AGRO 2021

Question de cours

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

Exercice préparé

On rappelle que si V et W sont deux variables indépendantes de densité f_V et f_W, alors $V+W$ est une variable à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Trois clients, notés A, B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin.

A et B occupent immédiatement (à l'instant $t=0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B. On néglige le temps de changement de personne.

On suppose que les durées de passage à une caisse par A, B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0;1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. À l'aide de simulations informatiques en Python, estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

RÉPONSE:

```python
import random as rd
NbExpe=10**5 # nb d'experiences
NbSucces=0 # nb de fois où C part en dernier
for i in range(NbExpe):
    DureeA=rd.random()
    DureeB=rd.random()
    DureeC=rd.random()
    if min(DureeA,DureeB)+DureeC>max(DureeA,DureeB):
        NbSucces+=1
print(NbSucces/NbExpe)
```

La loi faible des grands nombres assure que la fréquence calculée a peu de chance de s'éloigner de la probabilité théorique
On obtient `0.66743` la probabilité semble être de 2/3.

❀

2. On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à la caisse. Montrer que U admet une densité, puis en donner une.

RÉPONSE:

On note $F_\square$ la fonction de répartition associée à la variable aléatoire $\square$ et $f_\square U$ une densité.

$$U = \min(A,B)$$

Soit x in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F_U(x) &= \mathbb{P}(U \leqslant x) \\
&= 1-\mathbb{P}(U \geqslant x) \\
&= 1-\mathbb{P}((X \geqslant x, Y \leqslant x) && \text{intersection} \\
&= 1-\mathbb{P}((X \geqslant x)\mathbb{P}(Y \geqslant x) && \text{indépendance} \\
&= 1-\mathbb{P}(X \geqslant x)^2 && \text{même loi} \\
&= 1-(1-F_X(x))^2
\end{aligned}$$

Comme F_X est une fonction de répartition associée à une variable à densité connue, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1. Par produit et somme F_U est de même régularité, donc U admet une densité que l'on calcule en dérivant la fonction de répartition et que l'on complète arbitrairement

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \qquad f_U(x) = F'_U(x) = 2F'_X(X)(1-F_X(x)) = 2f'_X(x)(1-F_X(x))$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1<x \end{cases} \qquad F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1<x \end{cases}$$

$$\boxed{U \text{ admet une densité, donnée par } f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1<x \end{cases}}$$

❀

3. Déterminer l'espérance et la variance de U.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_0^1 x f_U(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x2(1-x)\,\mathrm{d}x && \text{intégrale non impropre} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \int_0^1 x^2 f_U(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)\,\mathrm{d}x && \text{intégrale non impropre} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

De plus

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{E(U) = \frac{1}{3} \text{ et } V(X) = \frac{1}{18}}$$

❀

4. On note T le temps total passé aux caisses par C en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.
   (a) Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.

RÉPONSE:

$$\boxed{T = Z + U}$$

❀

(b) Déterminer la loi de T.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f_U(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t && f_U(t) \text{ nul en dehors de } [0;1] \\ &= \int_{\max(0,x-1)}^{\min(1,x)} f_U(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t && f_Z(x-t) \text{ nul en dehors de } [x-1;x] \end{aligned}$$

- cas $x < 0$ alors $\max(0, x-1) = 0$ et $\min(1, x) = x$ donc on intègre sur un intervalle vide, l'intégrale vaut 0
- cas $0 < x \leqslant 1$ alors $\max(0, x-1) = 0$ et $\min(1, x) = x$

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_0^x 2(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-(1-t)^2\right]_0^x \\ &= 1-(1-x)^2 \end{aligned}$$

- cas $1 < x \leqslant 2$ alors $\max(0, x-1) = x-1$ et $\min(1, x) = 1$

$$\begin{aligned} \varphi_T(x) &= \int_{x-1}^1 2(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-(1-t)^2\right]_{x-1}^1 \\ &= (2-x)^2 \end{aligned}$$

- Cas $x > 1$ l'intégrale est vide

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ (2-x)^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}}$$

❀

(c) Déterminer l'espérance de T.

RÉPONSE:

Il n'est pas nécessaire d'utiliser le résultat précédent

$$E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{E(T) = \frac{5}{6}}$$

❀

5. On admet que la variable $D = |X - Y|$ a la même densité que la variable U. Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

RÉPONSE:

Remarque : On ne donne que les grandes étapes du calcul.
L'événement dont on cherche la probabilité est

$$A = [T > max(X, Y)]$$

C'est à dire

$$A = [Z + \min(X, Y) \geqslant \max(X, Y)]$$
$$A = [Z \geqslant \max(X, Y) - \min(X, Y)]$$

Un disjonction de cas montre

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$$

$$A = [U - D \geqslant 0]$$

Calcul d'une densité de $-D$ en passant par la fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_{-D}(x) = F_{-U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (1+x)^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut être en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{-D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2(1+x) & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcul d'une densité de $Z - D$ en utilisant le produit de convolution

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{Z-D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (1+x)^2 & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Calcul de $\mathbb{P}(A)$ en passant en utilisant une intégrale

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Z - D > 0) = \int_{-\infty}^{0} f_{Z-D}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

❀

Sujet 2 : Agro 2021

Question de cours

Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre 1/3.

Exercice préparé

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x,\ y\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_a(x) = \langle x,\ a\rangle$$

1. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f_a est une application linéaire.

RÉPONSE:

Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ fixé. f_a est bien définie entre deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un réel

$$\begin{aligned} f_a(\lambda x + y) &= \langle a,\ \lambda x + y\rangle \\ &= \lambda \langle a,\ x\rangle + \langle a,\ y\rangle && \text{linéarité à droite} \\ &= \lambda f_a(a) + f_a(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_a \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}}$$

❀

2. **Étude d'un exemple.** On pose dans cette question (uniquement) : $a = (1, 2, \dots, n)$.

(a) Expliciter f_a et donner une base de son noyau.

RÉPONSE:

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$f_a(x) = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f_(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n ix_i.}$$

Donc $x \in \text{Ker } f_a$ si et seulement si $x_1 = -2x_2 - \dots - nx_n$

$$\text{Ker } f_a = \text{Vect}\left((-2,1,0,\dots,0),(-3,0,1,0\dots,0),\dots,(-n,0,\dots,0,1)\right)$$

Soit $\lambda_2, \dots \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_2(-2,1,0,\dots,0) + \lambda_3(-3,0,1,0\dots,0) + \dots + \lambda_n(-n,0,\dots,0,1) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

alors

$$(-2\lambda_2 - \dots - n\lambda_n, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0,0,\dots,0)$$

donc

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$$

La famille est donc libre

$$\boxed{\text{Une base de Ker } f_a \text{ est } \left((-2,1,0,\dots,0),(-3,0,1,0\dots,0),\dots,(-n,0,\dots,0,1)\right)}$$

❀

(b) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(f_a)$?

3. Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, montrer que : $f_a = f_b \iff a = b$.

RÉPONSE:

Si $a = b$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f_a(x) = \langle a,\ x\rangle = \langle b,\ x\rangle = f_b(x)$$

alors $f_a = f_b$.
Réciproquement, soit a et b deux vecteurs tels que $f_a = f_b$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ f_a(x) = \langle a,\ x\rangle = \langle b,\ x\rangle = f_b(x)$$

donc par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \langle a - b,\ x\rangle =$$

Si cette égalité vraie pour tout vecteur x , elle est vraie pour $x = a - b$

$$\langle a - b,\ a - b\rangle = 0$$

donc

$$\|a - b\| = 0$$

et donc

$$a - b = 0$$

$$\boxed{\text{Pour } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}^n\ f_a = f_b \iff a = b.}$$

❀

4. Lorsque $a \neq 0$, quel est le rang de f_a ? En déduire la dimension de $\text{Ker}\left(f_a\right)$ lorsque $a \neq 0$.

RÉPONSE:

$$\text{Im } f_a \subset \mathbb{R}$$

et $\text{Im } f_a$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc pour des raisons de dimension

$$\text{Im } f_a = \{0\} \qquad \text{Im } f_a = \mathbb{R}$$

Si $a \neq 0$ alors $f_a(a) = \|a\|$ et $\|a\| \neq 0$ donc f_a n'est pas la fonction nulle et donc $\text{Im } f_a \neq \{0\}$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ alors Im } f_a = \mathbb{R}}$$

En utilisant le théorème du rang

$$\text{Dim } \mathbb{R}^n = \text{Dim Im } f_a + \text{Dim Ker } f_a$$

donc

$$n = 1 + \text{Dim Ker } \varphi_a$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ alors Dim Ker } \varphi_a = n - 1}$$

❀

5. On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$.
   Écrire la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver les résultats des questions 3 et 4 .

RÉPONSE:

La matrice M_a associé à f_a a

- n colonnes car la dimension de l'espace de départ est n
- 1 ligne car la dimension de l'espace d'arrivée est 1
- C'est donc une matrice ligne

Pour calculer le coefficient en colonne i il faut calculer $f_a(0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) = a_i$

$$\boxed{M_a = (a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)}$$

Remarque : On pouvait prouver directement ce résultat en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire : si A est la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et X celle du vecteur x alors

$$\langle a,\ x\rangle = A^{\mathrm{T}} X$$

❀

6. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer : $x = y \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$.

RÉPONSE:

L'implication $x = y \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$ est évidente.
Soit x et y des vecteurs tels que

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad f_a(x) = f_a(y)$$

alors

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad \langle a,\ x\rangle = \langle a,\ y\rangle$$

donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad \langle a,\ x - y\rangle = 0$$

Comme c'est vrai pour tout vecteur a, cette égalité est vraie pour $a = x - y$

$$\langle x - y,\ x - y\rangle = 0 = \|x - y\|$$

donc $x - y = 0$

$$\boxed{x = y \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y).}$$

❀

7. Soient a et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Écrire un programme Python qui calcule $f_a(x)$ et qui teste si un vecteur x est dans le noyau de f_a.

RÉPONSE:

```
def test(A,X):
    PS=0
    for i in range(len(X)):
        PS+=A[i]*X[i]
    if abs(PS)<10**-5:
        return True
    else:
        return False
```

❀

8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$ et que ce a est donné par $a = \sum_{k=1}^{n} g(e_k) e_k$.

RÉPONSE:

Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Sens direct/Analyse/Unicité Supposons qu'il existe a un vecteur tel que $g = f_a$ on peut alors décomposer a dans la base orthonormale, il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Alors pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} g(e_k) &= f_a(e_k) \\ &= \langle a,\ e_k\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ e_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i,\ e_k\rangle && \text{linéarité à gauche} \\ &= \lambda_1 0 + \cdots + 0 + \lambda_i 1 + 0 + \cdots + \lambda_n e_n && \text{base orthonormée} \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

On a donc démontrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \lambda_k = g(e_k)$$

Cela démontre en outre l'unicité (si il existe) du vecteur a.

réciproque/Synthèse/Existence

Posons $a = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} g(e_k)e_k$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} f_a(e_i) &= \langle \sum_{i \in [\![1,n]\!]} g(e_k)e_k,\ e_i\rangle \\ &= 0 + g(e_i)1 + 0 \qquad \text{même calcul que dans la partie qui précède} \end{aligned}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad f_a(e_i) = g(e_i)$$

g et f_a sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$ donc

$$f_a = g$$

$\boxed{\text{Il existe un unique } a \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } g = f_a \text{ et que ce } a \text{ est donné par } a = \sum_{k=1}^n g(e_k)\, e_k.}$

❀

9. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On admet que cet ensemble, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Montrer que $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

RÉPONSE:

La question précédente montre que ϕ est bijective.
Soit a et b deux vecteurs et λ un réel. Alors pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_{a+\lambda b}(x) &= \langle a + \lambda b,\ x\rangle \\ &= \langle a,\ x\rangle + \lambda \langle b,\ x\rangle \\ &= f_a(x) + \lambda f_b(x) \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$f_{a+\lambda b} = f_a + \lambda f_b$$

i.e.

$$\phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda\phi(b)$$

$\boxed{\phi \text{ est une application linéaire bijective}}$

❀

   (b) En déduire que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie, préciser sa dimension et donner une base.

SUJET 3 : AGRO 2021

Question de cours

Énoncer le théorème central limite.

Exercice préparé

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

RÉPONSE:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

❀

2. À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de g et conjecturer la dimension de chaque sous-espace propre de f. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable
On rappelle que, dans la bibliothèque Python numpy, la fonction `linalg.eig(A)` renvoie les valeurs propres (réelles et complexes) de A et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres (dans le même ordre).

RÉPONSE:

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la
A=np.array([[1,1,-1],[0,2,0],[-1,1,1]])
print(la.eig(A))
```

On obtient

```
array([2., 0., 2.]),
array([[ 0.70710678,  0.70710678,  0.40824829],
       [ 0.        ,  0.        ,  0.81649658],
       [-0.70710678,  0.70710678,  0.40824829]]))
```

2 semble être une valeur propre associée aux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

0 semble être une valeur propre associée au vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

❀

3. (a) Montrer que la famille $\mathscr{C}=(u,v,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

$$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $g(e_1)=(0,-2,1)$ donc $v=(1,-1,2)$
Soit α, β et γ trois réels tels que

$$\alpha u+\beta v+\gamma e_1=0$$

alors

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma & =0\\ -\alpha-2\beta & =0\\ \beta & =0\end{cases}$$

Qui implique $\alpha=\beta=\gamma=0$ la famille est donc libre. De plus son cardinal est égal à la dimension de de $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\mathscr{C}=(u,v,e_1)\text{ est une base de }\mathbb{R}^3}$$

❀

(b) Déterminer la matrice T de g dans la base $\mathscr{C}$.

RÉPONSE:

En utilisant la matrice B

$$g(u)=(2,-2,0)=2u$$
$$g(v)=(-2,2,0)=-2u$$
$$g(e_1)=v-e_1 \text{ sans calcul}$$

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

❀

(c) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

RÉPONSE:

Les valeurs propres de g sont celles d'une de ses matrices représentatives. T étant triangulaire ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T)=\{-1,0,2\}}$$

g étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$3 qui est de dimension 3 et a 3 valeurs propres distinctes deux à deux.

$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$

❀

4. On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MB\}$.

   (a) Écrire une fonction Python `E(M)` qui prend en argument une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui renvoie `True` si $M \in E$ et `False` sinon.
   On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction `N.all()` renvoie `True` si N ne contient que des `True` et renvoie `False` sinon.
   Indication dans la bibliothèque Python `numpy`, la fonction `matmul(N,P)` renvoie le produit matriciel NP.

RÉPONSE:

```python
def PythonE(M):
    A=np.array([[1,1,-1],[0,2,0],[-1,1,1]])
    B=np.array([[0,-2,-5],[-2,0,4],[1,1,0]])
    return (np.matmul(A,M)== np.matmul(M,B)).all()
```

C'est la version attendue par le concepteur du sujet, on peut préférer

```python
def PythonEbis(M):
    A=np.array([[1,1,-1],[0,2,0],[-1,1,1]])
    B=np.array([[0,-2,-5],[-2,0,4],[1,1,0]])
    return np.max(abs(np.matmul(A,M)- np.matmul(M,B)))<10**-5
```

❀

   (b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

C'est le noyau de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MB \end{array}$$

qui est "clairement" un endomorphisme

$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

❀

   (c) Montrer, par l'absurde, que si $M \in E$, alors M n'est pas inversible.

RÉPONSE:

Soit $M \in E$, alors

$$AM = MB$$

Supposons que M soit inversible on peut alors écrire

$$A = MBM^{-1}$$

donc A et M sont semblables et représente le même endomorphisme dans des bases différentes. Notamment les matrices A et B devraient partager les même valeurs propres ce qui n'est pas le cas.

$\boxed{\text{si } M \in E, \text{ alors } M \text{ n'est pas inversible.}}$

❀

   (d) Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}\left(B^{\mathrm{T}}\right)$ (où Sp(B) est l'ensemble des valeurs propres de B)

RÉPONSE:

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(B) &\Leftrightarrow B - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\ (B - \lambda I_3) \neq 3 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\ ((B - \lambda I_3)^{\mathrm{T}}) \neq 3 && \text{car rg } M = \text{rg } M^{\mathrm{T}} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\ (B^{\mathrm{T}} - \lambda {I_3}^{\mathrm{T}}) \neq 3 && \text{linéarité} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\ (B^{\mathrm{T}} - \lambda I_3) \neq 3 \\ &\Leftrightarrow B^{\mathrm{T}} - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(B^{\mathrm{T}}) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}\left(B^{\mathrm{T}}\right)}$

Remarque : on peut éviter de passer par le rang, le cours de première année permet de prouver

$$M \text{ inversible si et seulement si } M^{\mathrm{T}} \text{ est inversible}$$

Mais le rang et l'utilisation du théorème du rang nous permet de connaître la dimension des sous-espace vectoriel propres associés à λ qui sont donc identiques pour B et B^{T}

❀

(e) Montrer que, si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B^{T} associé à la valeur propre 2 , alors $X^{\mathrm{T}}Y \in E$.

RÉPONSE:

On commence par constaté que

$$B^{\mathrm{T}}Y = 2Y$$

donc

$$(B^{\mathrm{T}}Y)^{\mathrm{T}} = 2Y^{\mathrm{T}}$$

donc

$$Y^{\mathrm{T}}B = 2Y^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned} AXY^{\mathrm{T}} &= (AX)Y^{\mathrm{T}} && \text{associativité} \\ &= 2XY^{\mathrm{T}} && \text{définition vecteur propre } XY^{\mathrm{T}}B = 2XY^{\mathrm{T}} \quad \text{remarque précédente} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une telle matrice appartient à } E}$$

❀

(f) En déduire que $\dim(E) \geqslant 2$.

RÉPONSE:

Soit Y un vecteur propre de B^{T} associé à la valeur propre 2 ; il existe d'après car 2 est une valeur propre de B (voir la matrice T par exemple) et d'après la question 4c.
Soit X_1 et X_2 les deux vecteurs formant une base du sous-espace vectoriel propre de A associé à la valeur propre 2 (question 2) .
En utilisant la question précédente X_1Y^{T} et X_2Y^{T} sont deux matrices de E. On montrerait en les calculant qu'elles ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\dim(E) \geqslant 2}$$

❀

SUJET 4 : AGRO 2021

Question de cours

Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.

Exercice préparé

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats «Pile,Pile,Face », dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7 .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : :«Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : «Obtenir Pile au n-ème lancer ».

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3 , on pose :

- B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.
- U_n l'événement défini par : $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$.
- $u_n = P(U_n)$.

1. (a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence «Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

RÉPONSE:

```
mport random as rd
def simule():
    L=[]
    while len(L)<3 or L[-3]!='P' or L[-2]!='P' or L[-1]!='F':
    # si le premier test est vrai les suivants ne sont pas testés
    #ce qui évite les problèmes de sortie de liste
        r=rd.random()
        if r<0.5:
            L.append('P')
        else:
            L.append('F')
    return L
```

❀

(b) Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

RÉPONSE:

```
N=10**5
S=0
for i in range(N):
    S+=len(simule())
print(S/N)
```

On peut obtenir 7.9866

$$\boxed{\text{L'espérance de } X \text{ semble être 8.}}$$

❀

2. (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$ et justifier que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \\
&= \mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n) && \text{lancers indépendants} \\
&= \mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n) && \text{lancers indépendants} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{pièce équilibrée}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 3,\ \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{8}}$$

Par exemple

$$B_n \cap B_{n+2} = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cap P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} = \emptyset$$

$$\boxed{\text{Les événements } B_n, B_{n+1} \text{ et } B_{n+2} \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$$

❀

(b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_n$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
u_3 &= \mathbb{P}(B_3) \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) \\
&= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) && \text{incompatibilité} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5 &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) \\
&= \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) && \text{incompatibilité} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = \frac{1}{8}\ ,\ u_4 = \frac{2}{8} \text{ et } u_5 = \frac{3}{8}}$$

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
\left[\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right] \cap B_{n+3} &= \left(\left[\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right] \cap B_{n+3}\right) \cup (B_{n+1} \cap B_{n+3}) \cup (B_{n+2} \cap B_{n+3}) && \text{distributivité} \\
&= \left(\left[\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right] \cap B_{n+3}\right) \cup (\emptyset) \cup (\emptyset) && \text{question précédente} \\
&= \left(\left[\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right] \cap B_{n+3}\right)
\end{aligned}$$

De plus $\bigcup_{k=3}^{n} B_k$ dépend des lancer 1 à n et B_{n+3} dépend des lancer $n+1$, $n+2$, $n+3$ donc le lemme des coalitions montre que ces événements sont indépendants

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right] \cap B_{n+3}\right) &= \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right] \cap B_{n+3}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right]\right)\mathbb{P}(B_{n+3}) \\
&= \frac{1}{8} u_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+3} B_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right] \cup B_{n+3}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right) + \mathbb{P}(B_{n+3}) - \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right] \cap B_{n+3}\right) && \text{formule du crible/Poincaré} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_n && \text{calcul précédent}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} u_n.}$$

❀

(c) Démontrer que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite. En déduire la valeur de $P(X = -1)$.

RÉPONSE:

La suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est une suite de probabilités

$$\forall n \geqslant 3 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Or

$$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{8}(1 - u_n)$$

$$\forall n \geqslant 3 u_{n+3} - u_{n+2} \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \geqslant 3} \text{ est croissante à partir du rang 6.}}$$

Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \geqslant 3} \text{ converge.}}$$

Si on note $\ell \in [0;1]$ cette limite, l'égalité obtenue dans la question précédente permet d'affirmer

$$\ell = \ell + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\ell$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

devenu hors programme

$$\boxed{\mathbb{P}(X = -1) = 0}$$

❀

3. On admettra dans cette question le résultat suivant :
Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme général $P(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance, et

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$$

Pour tout entier naturel n, on note $v_n = P(X > n)$.

(a) Donner la valeur de v_0, v_1, v_2 et v_3.

RÉPONSE:

X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$

$$\boxed{v_0 = v_1 = v_2 = 1}$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= \mathbb{P}(X > 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(B_3) = \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 = \frac{7}{8}}$$

❀

(b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8} v_n$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$[X > n+2] = [X \geqslant n+3] = [X = n+3] \cup [X > n+3] \qquad \text{union disjointe}$$

De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n+3) &= \mathbb{P}([X>n]\cap B_{n+3})\\ &= \mathbb{P}(X>n)\mathbb{P}B_{n+3}) && \text{indépendance}\\ &= u_n\frac{1}{8}\end{aligned}$$

L'indépendance de l'avant dernière étape est prouvée avec le lemme des coalitions $[X>n]$ dépend des lancers 1 à n et B_{n+3} dépend des lancers $n+1$,$n+2$, $n+3$.
On a donc montré

$$v_{n+2}-v_{n+3}=\frac{1}{8}v_n$$

❀

(c) Montrer que X admet une espérance, et déterminer cette espérance.

RÉPONSE:

La suite de probabilité $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et à valeurs dans $[0;1]$. L'égalité précédente montre qu'elle est décroissante à partir du rang 3. Elle converge vers une limite notée ℓ qui vérifie

$$\ell-\ell=\frac{1}{8}\ell$$

donc $\ell=0$.
Soir $N\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}v_n &= 8\sum_{n=0}^{N}v_{n+2}-v_{n+3}\\ &= 8v_2-8v_{N+3} && \text{télescopage}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}v_{n+3}=0$

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}v_n=8v_2=8$$

❀

En utilisant l'indicaton de l'énoncé

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui vaut } 8.}$$

SUJET 5 : AUTRE

Question de cours

Énoncer la définition de sous espace vectoriel et d'application linéaire

Exercice préparé

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On note G la fonction :

$$G:t\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=k)t^k.$$

(a) Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$ une expression de $G(t)$ en fonction de t. Préciser en particulier la valeur de $G(-1)$.

RÉPONSE:

On doit étudier la convergence de

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^k}{k!}t^k=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On reconnaît une série exponentielle qui converge pour toute valeur de λt donc pour tout réel t

$$\boxed{G \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et pour } t\in\mathbb{R},\ G(t)=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

Notamment

$$\boxed{G(-1)=\mathrm{e}^{-2\lambda}}$$

❀

(b) En déduire la probabilité que la variable aléatoire Z soit paire.

RÉPONSE:

On cherche à calculer

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k \text{ pair}}}\mathbb{P}(Z=k)$$

On constate que

$$G(1)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(Z=k)1^k \qquad G(-1)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(Z=k)(-1)^k$$

donc en sommant ces deux égalités, les termes impaires s'annulent

$$G(1)+G(-1)=2\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\text{ pair}}}\mathbb{P}(Z=k)$$

or comme le support de Z est $\mathbb{N}$

$$G(1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=k)=1$$

$$\boxed{\text{La probabilité que } Z \text{ soit paire est } \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}}$$

❀

(c) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(Z\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Indication on pourra raisonner par récurrence et faire une intégration par parties

RÉPONSE:

On pose pour $n\in\mathbb{N}$

$$\mathscr{H}_n\ :\mathbb{P}(Z\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Initialisation pour $n=0$, on a

$$\mathbb{P}(Z=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=\mathrm{e}^{-\lambda}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{0!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^0\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t&=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &=\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{\lambda}^{+\infty} && \text{il faut savoir passer par } \int_{.}^{A}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Z\leqslant 0)=\frac{1}{0!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^0\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons $\mathscr{H}_n$ vraie

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{+\infty}t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t&=\left[-\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}\right]_{\lambda}^{+\infty}+(n+1)\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t && \text{IPP (à savoir rédiger)}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n+1}+(n+1)\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t} && \text{les crochets convergent, croissances comparées}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z\leqslant n+1)&=\mathbb{P}(Z\leqslant n)+\mathbb{P}(Z=n+1)\\ &=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+\mathbb{P}(Z=n+1) && \text{HR}\\ &=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} && \text{Loi de Poisson}\\ &=\frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

❀

(d) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Comme la série est convergent

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=k)=1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(z\leqslant n)=1$$

Comme cette limite est un réel non nul

$$\mathbb{P}(Z\leqslant n)\underset{n\to+\infty}{\sim}1$$

et donc

$$\boxed{\int_\lambda^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n!}$$

❀

2. Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1 .

   (a) Déterminer l'espérance et la variance éventuelles de $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

RÉPONSE:

Par linéarité de l'espérance et comme tous les X_k admettent une espérance, Y_n admet une variance et

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n$$

$$\boxed{E(Y_n) = n\lambda}$$

Comme les X_k admettent une variance et **sont indépendantes** Y_n admet une variance et

$$V(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

$$\boxed{E(Y_n) = n \qquad V(Y_n) = n}$$

❀

   (b) Rappeler le théorème central limite puis utiliser ce théorème pour calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n)$$

RÉPONSE:

Théorème 1 (Théorème limite central)**.**
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une espérance μ et variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites

$$M_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{M_n - m}{\sigma}\right)$$

associées aux variables

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
D'où, on a pour tout (a,b) tel que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a \leqslant M_n^* \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t = \Phi(b) - \Phi(a)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

On applique ce théorème à (X_i), on constate que

$$M_n = \frac{Y_n}{n}$$

$$\begin{aligned}\left[a \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{\frac{Y_n}{n} - 1}{1}\right) \leqslant b\right] &= \left[a\sqrt{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{Y_n}{n} - 1 \leqslant b\sqrt{\frac{1}{n}}\right] \\ &= \left[n + a\sqrt{n} \leqslant Y_n \leqslant b\sqrt{n} + n\right]\end{aligned}$$

On va donc appliquer le théorème central limite avec $a = -\infty$ et $b = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \Phi(0) = \frac{1}{2}}$$

❀

   (c) En déduire un équivalent de $\int_n^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

De plus on sait que Y_n suit la loi de Poisson de paramètre n (cours) donc d'après la réponse à la question 1c

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_n^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} n!}$$

❀

3. **Simulation**
On admet le résultat suivant

> **Théorème**
>
> Soit $(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoire indépendantes suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ On note
>
> $$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_i \qquad N = max\left\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } S_n \leqslant 1\right\}$$
>
> Alors N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On peut utiliser ce résultat pour simuler des variables aléatoires suivant des lois de Poissons.

(a) Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1[)$ quel est la loi suivie par $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

RÉPONSE:

A savoir faire en passant par la fonction de répartition

$$\boxed{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)}$$

❀

(b) Écrire une fonction python `expo(lam)` qui renvoie la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(lam)$. Le seul générateur aléatoire que vous pouvez utiliser est `random()`.

RÉPONSE:

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def expo(lam):
    return -np.log(1-rd.random())/lam
```

❀

(c) Écrire une fonction python `poi(lam)` qui renvoie la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}(lam)$.

RÉPONSE:

```
def poi(lam):
    S=0
    n=0
    while S<=1:
        n+=1
        S+=expo(lam)
    return n-1
```

❀

(d) Écrire une fonction python `poisson(lam,n)` qui renvoie une liste de n réalisations indépendantes suivant des lois $\mathscr{P}(lam)$.

RÉPONSE:

```
def poisson(lam,n):
    return [poi(lam) for i in range(n)]
```

❀

(e) Utiliser ces fonctions pour illustrer les résultats prouvés aux questions 1b et 2b

RÉPONSE:

Pour illustrer 1b

```
Nexp=10**5
lam=0.75
NbPair=0
for i in range(Nexp):
    if poi(lam)%2==0:
        NbPair+=1
print(NbPair/Nexp)
print((1+np.exp(-2*lam))/2)
```

On obtient

```
0.61034
0.611565080074215
```

Pour $\lambda = 2.1$ on obtient

```
0.50828
0.5074977884102388
```

Pour illustrer 2b

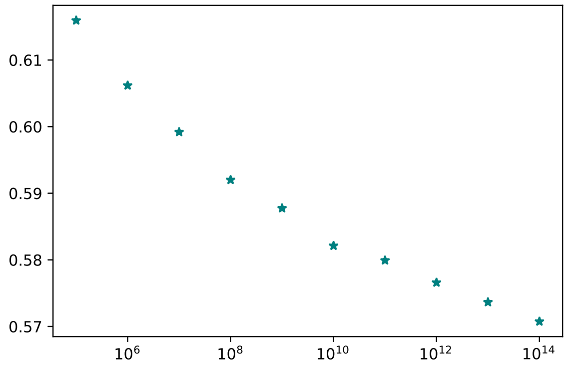
```
import matplotlib.pyplot as plt

Nexp=10**6

Ln=[]
LP=[]
for n in range(5,15):
    Ln.append(10**n)
    NbSucces=0
    for i in range(Nexp):
        if sum(poisson(1,n))<=n:
            NbSucces+=1
    LP.append(NbSucces/Nexp)

plt.semilogx(Ln,LP,'*',color='teal')
```

Attention : lors des oraux la convergence est trés lente.
On obtient (échelle semi log)



❀

SUJET 6 : AGRO 2021

Question de cours

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice préparé

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X.

Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.

Si X est nul, on considère que la manche est nulle.

Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna, on considère que Anna a gagné.

On pose G le gain algébrique de Anna.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a avec $a > 0$.

On note enfin :

A : « Anna gagne », $p = P(A)$

B : « Benoît gagne », $q = P(B)$

et C : « la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G.

   On rappelle que `np.random.poisson(a)` permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a.

RÉPONSE:

```
from numpy.random import poisson

def SimulGain(a):
    X=poisson(a)
    if X==0:
        Gain=0
    elif X %2==0:
        Gain =X
    else:
        Gain=-X
    return Gain
```

❀

2. (a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.

RÉPONSE:

$$r = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{a^0}{0!}\mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^{-a}$$

$$\begin{aligned}
p &= \mathbb{P}(A)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\\
q &= \mathbb{P}(B)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{r=\mathrm{e}^{-a} \quad p=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!} \ \text{ et } \ q=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

❀

(b) Exprimer $p+q$ et $p-q$ en fonction de a.

RÉPONSE:

On a $p+q+r=1$ donc

$$p+q=1-\mathrm{e}^{-a}$$

et

$$\begin{aligned}
p-q &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}(-1)^{2k}\frac{a^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}(-1)^{2k+1}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{le signe de } (-1)^i \text{ dépend de la parité de } i\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a}(-1)^i\frac{a^i}{i!} && \text{"fusion" des deux } \Sigma\\
&= \mathrm{e}^{-a}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-a)^i}{i!}\\
&= \mathrm{e}^{-a}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-a)^i}{i!}-1\right)\\
&= \mathrm{e}^{-a}\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r=\mathrm{e}^{-a} \quad p+q=1-\mathrm{e}^{-a} \ \text{ et } \ p-q=\mathrm{e}^{-a}\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)}$$

❀

(c) En déduire les valeurs de r, p, q en fonction de a.

RÉPONSE:

Nous devons donc résoudre un système

$$\begin{cases} p+q &= 1-\mathrm{e}^{-a}\\ p-q &= \mathrm{e}^{-2a}-\mathrm{e}^{-a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q &= 1-\mathrm{e}^{-a}\\ 2p &= 1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a}\end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2+L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q &= \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2a}\right)\\ p &= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a}\right)\end{cases}$$

$$\boxed{r=\mathrm{e}^{-a}\ ,\ q=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2a}\right) \ p=\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2a}-2\mathrm{e}^{-a}\right)}$$

❀

3. Compléter le programme de la question 1, pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.

RÉPONSE:

```
def ProbaEspe(a,N=10**5):
    NbSucces=0
    NbNul=0
    SommeG=0
    for i in range(N):
        X=SimulGain(a)
        if X==0:
            NbNul+=1
        elif X>0:
            NbSucces+=1

        SommeG+=X

    return NbNul/N,NbSucces/N,SommeG/N
```

Pour pouvoir vérifier numériquement nos calculs, la fonction donne aussi une probabilité que la manche soit nulle.

❀

4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage? On pourra tester les valeurs du gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.

RÉPONSE:

```
In[18]: ProbaEspe(2)
Out[18]: (0.13441, 0.37363, -0.03964)
```

Anna semble avoir un gain moyen négatif

❀

5. (a) Exprimer G en fonction de X

RÉPONSE:

$$\boxed{G = (-1)^X X}$$

Cette formule est valable même si $X = 0$, la manche est nulle est le gain des deux joueurs est nul.

❀

(b) Calculer l'espérance du gain G de Anna.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k\mathbb{P}(X=k) && \text{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{(k-1)!}\\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-a}(-a)^{k+1}}{k!} && \text{changement d'indice}\\
&= -a\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k!}\\
&= -a\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-a} && \text{série exponentielle absolument convergente}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = -a\mathrm{e}^{-2a}}$$

❀

6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.
   (a) Déterminer p, q, r.

RÉPONSE:

X ne peut pas prendre la valeur 0

$$\boxed{r = 0}$$

On a $p + q + r = 1$ donc

$$p + q = 1$$

$$\begin{aligned}
p - q &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k}\\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(-1)^k(1-\alpha)^k\\
&= -\alpha(1-\alpha)\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\alpha)^k && \text{changement d'indice}\\
&= \alpha(\alpha-1)\frac{1}{1-(1-\alpha)} && \text{série géométrique}\\
&= \alpha - 1
\end{aligned}$$

$$p - q = \alpha - 1$$

$$\boxed{p = \frac{\alpha}{2} \text{ et } q = 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

❀

(b) Calculer l'espérance $E(G)$ de G après avoir justifié son existence.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned}
E(G) &= E((-1)^X X) \\
&= \sum_{k=1}^{-\infty} (-1)^k k\mathbb{P}(X=k) && \text{théorème de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{-\infty} (-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1} \\
&= -\alpha \sum_{k=1}^{-\infty} (\alpha-1)^{k-1} \\
&= -\alpha \frac{1}{1-(\alpha-1)^2} && \text{série dérivée absolument CV}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = -\alpha \frac{1}{1-(\alpha-1)^2}}$$

❀

(c) Comment interpréter le signe de $E(G)$?

RÉPONSE:

$(1-\alpha)^2 \in]0;1[$, cette espérance est négative

❀

SUJET 7 : AGRO 2021

Question de cours

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice préparé

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :

$$\text{en tout point } a, \quad \varphi(a+h) \simeq \varphi(a) + h\varphi'(a), \quad \text{lorsque } h \text{ est petit (positif ou négatif)}$$

Soit $I =]1; +\infty[$, et on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I \qquad -t^2 y'(t) + t y(t) = (y(t))^2$$

ayant pour inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. (a) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ est une solution de l'équation (E) sur $]1; +\infty[$.

RÉPONSE:

$$\forall t \in]1; +\infty[\qquad \ln(t) > 0$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ comme quotient défini de fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\forall t \in]1; +\infty[\qquad f'(t) = -\frac{t}{t\ln^2(t)} + \frac{1}{\ln t}$$

Donc pour $t \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
-t^2 f'(t) + t f(t) &= \frac{t^3}{t\ln^2 t} - \frac{t^2}{\ln t} + \frac{t^2}{\ln t} \\
&= \frac{t^2}{\ln^2 t} \\
&= (f(t))^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la fonction } f : t \mapsto \frac{t}{\ln(t)} \text{ est une solution de l'équation } (E) \text{ sur }]1; +\infty[}$$

❀

(b) L'ensemble $\mathscr{S}$ est-il un espace vectoriel ?

RÉPONSE:

On vérifie rapidement que $-f$ n'est pas solution de l'équation différentielle, l'ensemble des solutions n'est pas stable par multiplication par un scalaire

$$\boxed{\mathscr{S} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

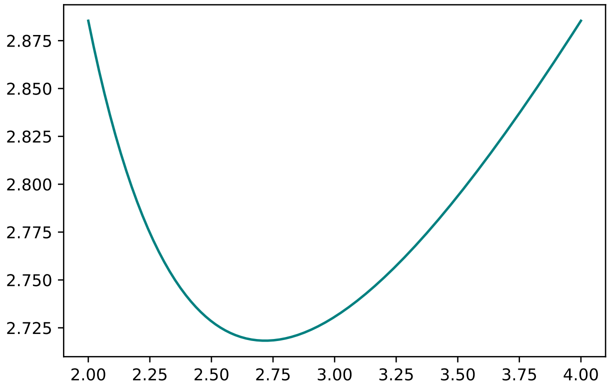
❀

(c) Représenter en Python la fonction f sur l'intervalle $]2;4[$.

RÉPONSE:

```
import numpy as np

#tracer
X=np.linspace(2,4,1000)
Y=X/np.log(X)
plt.plot(X,Y,color='teal')
plt.show()
```



❀

2. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$.
   Sous réserve d'existence de y, utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $]2;4[$ en partant du point $(e;3)$.
   On pourra tracer successivement une solution sur $]e;4[$ puis une solution sur $]2;e[$.
   Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.

RÉPONSE:

La fonction `euler` prend en argument une fonction F renvoie la liste des temps discrétisés et des valeurs approchées

```
def euler(f,y0,a,b,n):
    """méthode d'Euler
        f fonction défininssant l' équation diff
         y0 valeur initiale en a
         b borne de l'intervalle de calcul
         n nombre de pas
    """
    pas= (b-a)/n
    resultat=[y0]
    y=y0
    t=a
    Listet=[a]
    for i in range(1,n+1):
        y=f(t,y)*pas +y
        resultat.append(y)
        t=t+pas
        Listet.append(t)
    return resultat,Listet
```

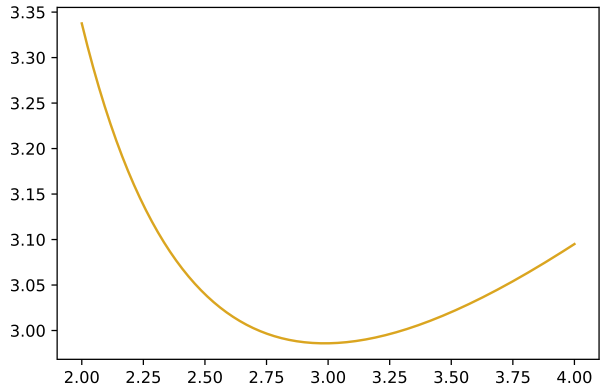
La fonction suivante est celle définissant l'équation différentielle

```
def F(t,y):
    return 1/t*y-y**2/(t**2)
```

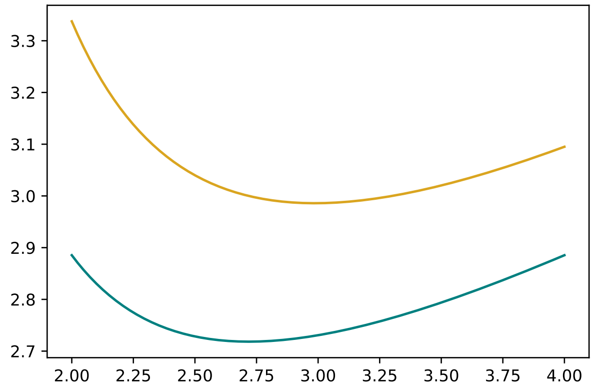
On utilise deux fois la méthode d'Euler et on concatène des solutions(après un appel à la méthode `reverse` pour la partie avant e)

```
Y1,T1=euler(F,3,np.exp(1),4,10**7)
Y2,T2=euler(F,3,np.exp(1),2,10**7)
T2.reverse()
Y2.reverse()
T=T2+T1
Y=Y2+Y1
plt.plot(T,Y,'goldenrod')
plt.show()
```

On obtient



et pour comparer



Les deux courbes ont même allure, il semble que l'on ait trouvé deux solutions de l'équation différentielle avec des conditions initiales différentes.

❀

3. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire (E') :

$$t^2 z'(t) + tz(t) = 1$$

ayant pour inconnue une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

RÉPONSE:

Remarque : les détails des calculs sont omis
Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ l'équation dévient

$$z'(t) + \frac{1}{t} z(t) = \frac{1}{t^2}$$

En utilisant les résultats du cours, l équation homogène associée a pour solution sur I les fonctions

$$t \mapsto K \frac{1}{t}$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto K(t) \frac{1}{t}$$

Cette fonction est solution de (E') si et seulement si

$$\forall t \in]1; +\infty[\qquad K'(t) \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}$$

On peut donc proposer

$$\forall t \in I \qquad K(t) = \ln t$$

Les solutions sur I de (E') sont exactement les fonctions $t \mapsto (\ln t + K) \frac{1}{t}$, où K est une constante réelle.

❀

4. Soit y une solution de (E), qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I.
Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{y(t)}$ est solution de (E').
En déduire l'expression de y.

RÉPONSE:

Dans ce cas on note $z = \dfrac{1}{y}$
Alors pour $t \in]1;+\infty[$

$$\begin{aligned} t^2 z'(t) &= t^2\left(-\frac{y'(t)}{(y(t))^2}\right) \\ &= t^2\left(-\frac{\frac{1}{t}y(t) - \frac{(y(t))^2}{t^2}}{(y(t))^2}\right) && \text{y sol de } (E) \\ &= t^2\left(-\frac{1}{t\,y(t)} + \frac{1}{t^2}\right) \\ &= -tz(t) + 1 \end{aligned}$$

Si y est solution ne s'annulant jamais de (E) alors $1/y$ est solution de (E').
Les solutions de (E') ne s'annulant pas sur $]1;+\infty[$ sont exactement les fonctions

$$t \mapsto (\ln t + K)\frac{1}{t}$$

où $K \in \mathbb{R}_+^*$
Les fonctions solutions de (E), ne s'annulant pas sur $]1;+\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto \frac{t}{\ln t + K}$$

où $K \in \mathbb{R}_+^*$

❀

5. (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des fonctions de $\mathscr{S}$ qui ne s'annulent pas sur I.

RÉPONSE:

Par le calcul on vérifie que toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions de (E) et ne s'annulent pas.

> Les solutions sur I de (E) qui ne s'annullent pas sont exactement les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t + K}$, où K est une constante réelle strictement positive.

❀

(b) A-t-on $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$?

RÉPONSE:

Non car la fonction nulle est solution de (E)

❀

(c) Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I ?

RÉPONSE:

On cherche y de la forme $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t + K}$ avec $y(e) = 3$
ce qui donne

$$K = \frac{\mathrm{e}}{3} - 1$$

ce qui est négatif, il n'existe donc pas de solution vérifiant ces conditions
La solution $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t + \frac{\mathrm{e}}{3} - 1}$ est définie sur $\left]\exp(\mathrm{e}/3 - 1)); +\infty\right[$ avec $\exp(\mathrm{e}/3 - 1)) \sim 1.098$ au bord gauche de l'intervalle, la fonction tend vers $+\infty$.

❀

SUJET 8 : AGRO 2021

Question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice préparé

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires à densité, indépendantes et de même fonction de répartition F, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k(\omega)$ la k-ème plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$.
En particulier, on a $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer $P(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1. Reconnaître une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.
   (b) Montrer que si U est une variable qui suit la loi uniforme sur $]0;1]$ alors $\frac{-1}{\lambda}\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (c) Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in [\![1, n]\!]$ donnés, permet de simuler la variable aléatoire Y_i lorsque les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra pour cela utiliser l'instruction $B =$ `sorted (A)` qui fournit un tableau B contenant les valeurs du tableau A rangées dans l'ordre croissant.

On retourne maintenant au cas général.

2. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F.
3. Les variables Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i, pour n'importe quel i dans $[\![1, n]\!]$. On fixe donc i dans $[\![1, n]\!]$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer $P\left(Y_i \leqslant x\right)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ soient inférieures ou égales à x.
5. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leqslant x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon. Reconnaître la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).

   (b) On note $S = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. Que représente S ? Reconnaître sa loi.

   (c) Montrer que $P\left(Y_i \leqslant x\right) = P(S \geqslant i)$ et en déduire l'expression de $P\left(Y_i \leqslant x\right)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

SUJET 9 : AGRO 2021

Question de cours

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice préparé

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0; 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X.
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
   Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{n}}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n.

   (b) Calculer alors pour tout réel x :

$$G(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \leqslant x)$$

   (c) On admet que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité. Montrer que T admet pour densité la fonction x donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (d) À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

SUJET 10 : AGRO 2021

Question de cours

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice préparé

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n. Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population $(r > 0)$.

1. Montrer qu'en posant $b = \frac{r}{p}$, $\alpha = \mathrm{e}^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = b y_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \alpha x_n \mathrm{e}^{-x_n}$. Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$?

Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.

2. Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ selon la valeur de α.
5. (a) Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaître les points $\left(k, x_k\right)$ pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge.
   On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.

   (b) Tester votre programme dans le cas où $u_0 = 0.5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in \left]\mathrm{e}; \mathrm{e}^2\right[$.

   (a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0;1[$ tel que pour tout réel $x \in [1;+\infty[$, $\left|f'_\alpha(x)\right| \leqslant M$.

(c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $[0;1[$ et μ_α celle dans $]1;+\infty[$.

(d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in \left[\lambda_\alpha;\mu_\alpha\right]$. On procède par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0;\lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha;+\infty[$.

Montrer, sous cette hypothèse, que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0;\lambda_\alpha]$, puis que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.

(e) On admet que $f_\alpha\left(\alpha e^{-1}\right) > 1$. Montrer que pour tout $x \in \left[1,\mu_\alpha\right]$, $f_\alpha(x) \in \left[1,\mu_\alpha\right]$.

(f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in \left[\lambda_\alpha,\mu_\alpha\right]$. Montrer que $x_{n_0+1} \in \left[1,\mu_\alpha\right]$, puis que pour $n \geqslant n_0+1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\,|x_n - \ln(\alpha)|$.

(g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

SUJET 11 : AGRO 2021

Question de cours

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice préparé

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f et g, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité h est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On s'intéresse à une modélisation du temps de présence de nouvelles espèces qui apparaissent entre les instants 0 et $\theta > 0$ dans un milieu donné.

À chaque nouvelle espèce (e), on associe deux variables aléatoires :

- X_e l'instant d'apparition qui est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,\theta]$.
- Y_e sa durée de vie dans le milieu qui est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et indépendante de la précédente.

1. On s'intéresse à une espèce (e).

   (a) Que représente $X_e + Y_e$?

   (b) Déterminer une densité de $X_e + Y_e$.

   (c) Pour tout $t > 0$, on pose $p = P([X_e + Y_e > \theta + t])$. Montrer que $p = \frac{1-e^{-\theta}}{\theta} e^{-t}$.

On suppose que les variables aléatoires associées aux différentes espèces sont mutuellement indépendantes et on note N le nombre aléatoire d'espèces qui apparaissent. On suppose que N est indépendante des variables aléatoires associées aux espèces et que N suit la loi de Poisson de paramètre μ.

Pour tout $t > 0$, on note Z_t le nombre d'espèces, parmi celles qui sont apparues, qui sont encore présentes dans le milieu à l'instant $\theta + t$.

2. (a) Écrire un programme Python `Esp2Zt (theta,mu, t)` qui calcule et renvoie une valeur approchée de $E(Z_t)$.

   On rappelle qu'après avoir importé le module `numpy.random`, l'instruction `rand()` (respectivement `poisson(a)` et `exponential(b)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1[$ (respectivement, de loi de Poisson de paramètre a, et de loi exponentielle **d'espérance** b.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle Z_t sachant $[N = n]$.

   (c) En déduire que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp.

   Vérifier la cohérence de ce résultat avec les valeurs obtenues avec le programme de la question 2.a) pour $\theta = 6, \mu = 16, t = 4$ et $\theta = 6, \mu = 30, t = 7$.

On admet dans la suite que $W_t = N - Z_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu(1-p)$ puis que Z_t et W_t sont indépendantes.

3. (a) Montrer que $E\left(\frac{1}{W_t+1}\right) = \frac{1-e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$ puis calculer $E\left(\frac{Z_t}{W_t+1}\right)$ en fonction de μ et de p.

   (b) Montrer que pour tout $a \in]0,1[$:

   $$\mathbb{P}([Z_t \geqslant aN]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t+1} \geqslant a\right]\right)$$

   puis en déduire que :

   $$P([Z_t \geqslant aN]) \leqslant \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}$$

   (c) On suppose que $\mu = \theta^2$. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0;2[$; on a

   $$\lim_{\theta\to+\infty} P\left(\left[Z_{\ln(\theta)} \geqslant \frac{N}{\theta^\alpha}\right]\right) = 0$$