Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 1

Partie I. Approche thermodynamique

1. Par lecture de l'énoncé on peut affirmer que $\boxed{u_0 = N \text{ et } v_0 = 0.}$
2. Le nombre total de molécules présentes dans les deux urnes est constant au cours du temps car les molécules ne peuvent pas sortir de ces deux urnes. Cela signifie que $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n + v_n = N.}$

   Et on en déduit ainsi que, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = N - v_n.}$
3. La différence $u_{n+1} - u_n$ correspond à la variation du nombre de molécules dans la première urne. Elle est donc égale au nombre de molécules passées de la deuxième urne à la première (Kv_n) moins le nombre de molécules passées de la première urne à la deuxième (Ku_n). On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= Kv_n - Ku_n \\ &= K(N - u_n) - Ku_n \\ \Rightarrow \quad u_{n+1} &= KN + (1-2K)u_n. \end{aligned}$$

   En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = KN + (1-2K)u_n.}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{N}{2} \\ &= KN + (1-2K)u_n - \frac{N}{2} \\ &= (1-2K)\left(u_n - \frac{N}{2}\right) = (1-2K)w_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } 1-2K \text{ et de premier terme } w_0 = \frac{N}{2}.}$$

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{N}{2}(1-2K)^n$ et donc $\boxed{u_n = \frac{N}{2}(1-2K)^n + \frac{N}{2}.}$

   À la question 2. nous avons vu que $v_n = N - u_n$, donc on peut en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}(1-2K)^n.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = -KN(1-2K)^n < 0, \text{ car } K \in \left]0; \frac{1}{2}\right[.$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   Comme $v_n = N - u_n$, on peut affirmer que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
7. On sait que $K \in]0;1[$ donc $1 - 2K \in]-1;1[$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2K)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{N}{2}.}$$

8. La question précédente montre qu'au bout d'un temps très long, on tend vers une situation où il y a autant de molécules dans les deux enceintes.
9. Il semble, avec ce modèle, que la transformation ne soit pas réversible car on tend vers une certaine distribution des molécules, et il n'est pas exemple pas possible de revenir à la situation initiale au bout d'un temps long.

Partie II. Approche probabiliste

II.A Le cas de trois molécules

10. On sait que toutes les molécules sont dans l'urne U à l'instant initiales donc $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([B_k = 0], [B_k = 1], [B_k = 2], [B_k = 3])$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_{k+1} = 0) &= P(B_k = 0)P_{[B_k=0]}(B_{k+1} = 0) + P(B_k = 1)P_{[B_k=1]}(B_{k+1} = 0) \\ &\quad + P(B_k = 2)P_{[B_k=2]}(B_{k+1} = 0) + P(B_k = 3)P_{[B_k=3]}(B_{k+1} = 0) \\ &= P(B_k = 0) \times 0 + P(B_k = 1) \times \frac{1}{3} + P(B_k = 2) \times 0 + P(B_k = 3) \times 0 \\ &= \frac{1}{3}P(B_k = 1). \end{aligned}$$

On a $P_{[B_k=0]}(B_{k+1} = 0) = P_{[B_k=2]}(B_{k+1} = 0) = P_{[B_k=3]}(B_{k+1} = 0) = 0$ car à chaque étape une seule molécule change d'urne. S'il y a 1 molécule dans l'urne U à l'instant k alors il y a 1 chance sur trois de choisir ce numéro et donc de se retrouver avec aucune molécule dans l'urne U à l'instant $k + 1$.
De même :

$$\begin{aligned} P(B_{k+1} = 1) &= P(B_k = 0)P_{[B_k=0]}(B_{k+1} = 1) + P(B_k = 1)P_{[B_k=1]}(B_{k+1} = 1) \\ &\quad + P(B_k = 2)P_{[B_k=2]}(B_{k+1} = 1) + P(B_k = 3)P_{[B_k=3]}(B_{k+1} = 1) \\ &= P(B_k = 0) \times 1 + P(B_k = 1) \times 0 + P(B_k = 2) \times \frac{2}{3} + P(B_k = 3) \times 0 \\ &= P(B_k = 0) + \frac{2}{3}P(B_k = 2). \end{aligned}$$

On a $P_{[B_k=1]}(B_{k+1} = 1) = P_{[B_k=3]}(B_{k+1} = 1) = 0$ car à chaque étape une seule molécule change d'urne. De plus, si toute les molécules sont dans l'urne V à l'instant k alors il y en aura obligatoirement une dans l'urne U à l'instant $k + 1$ ($P_{[B_k=0]}(B_{k+1} = 1) = 1$) et s'il y a 2 molécules dans l'urne U à l'instant k alors il y a 2 chances sur trois de choisir l'un de ces deux numéros et donc de se retrouver avec une molécule dans l'urne U à l'instant $k + 1$.

12. Exactement de la même manière que dans la question précédente, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} P(B_{k+1} = 2) &= \frac{2}{3}P(B_k = 1) + P(B_k = 3) \\ P(B_{k+1} = 3) &= \frac{1}{3}P(B_k = 2). \end{aligned}$$

On a donc

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}P(B_k = 1) \\ P(B_k = 0) + \frac{2}{3}P(B_k = 2) \\ \frac{2}{3}P(B_k = 1) + P(B_k = 3) \\ \frac{1}{3}P(B_k = 2) \end{pmatrix} = MX_k,$$

avec M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

13. Par simple produit matriciel on obtient :

$$\boxed{X_1 = MX_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } X_2 = MX_1 = \begin{pmatrix}0\\2/3\\0\\1/3\end{pmatrix}.}$$

14. Après calculs on obtient $\boxed{S^2 = \begin{pmatrix}8&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&8\end{pmatrix} = 8I_4.}$

On a donc $S \times \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}S \times S = I_4$, ce qui signifie que $\boxed{S \text{ est inversible et } S^{-1} = \frac{1}{8}S.}$

15.
```
import numpy as np

S=np.array([[-1,1,-1,1],[3,-1,-1,3],[-3,-1,1,3],[1,1,1,1]])
M=np.array([[0,1/3,0,0],[1,0,2/3,0],[0,2/3,0,1],[0,0,1/3,0]])

print(np.dot(np.dot(1/8*S,M),S))
```

16. On commence par remarquer que $M = SDS^{-1} \Leftrightarrow D = S^{-1}MS$.

En considérant alors que les 0.33333333 affichés par Python correspondent à $\frac{1}{3}$, on peut supposer que $\boxed{D = S^{-1}MS = \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1/3&0&0\\0&0&1/3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.}$ *Si on a le courage on peut vérifier cela en effectuant rigoureusement le calcul !*

17. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $X_k = SD^kS^{-1}X_0$ » est vraie pour tout entier naturel k.

— Par convention, $D^0 = I_4$, donc $SD^0S^{-1}X_0 = SS^{-1}X_0 = X_0$. La propriété est donc bien vérifiée pour $k = 0$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
D'après la question 12., le lien entre M et D et la propriété $\mathscr{P}(k)$, on a alors :

$$X_{k+1} = MX_k = SDS^{-1}SD^kS^{-1}X_0 = SD^{k+1}S^{-1}X_0.$$

La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est donc vérifiée.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ X_k = SD^kS^{-1}X_0.}$

18. D étant une matrice diagonale, on sait que $D^k = \begin{pmatrix}(-1)^k&0&0&0\\0&(-1/3)^k&0&0\\0&0&(1/3)^k&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

En effectuant alors tous les produits matriciels, on obtient :

$$\boxed{X_k = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}(-1)^{k+1} + 3\times(-1/3)^k - (1/3)^{k-1} + 1\\ 3\times(-1)^k - 3\times(-1/3)^k - (1/3)^{k-1} + 3\\ -3\times(-1)^k - 3\times(-1/3)^k + (1/3)^{k-1} + 3\\ (-1)^k + 3\times(-1/3)^k + (1/3)^{k-1} + 1\end{pmatrix}.}$$

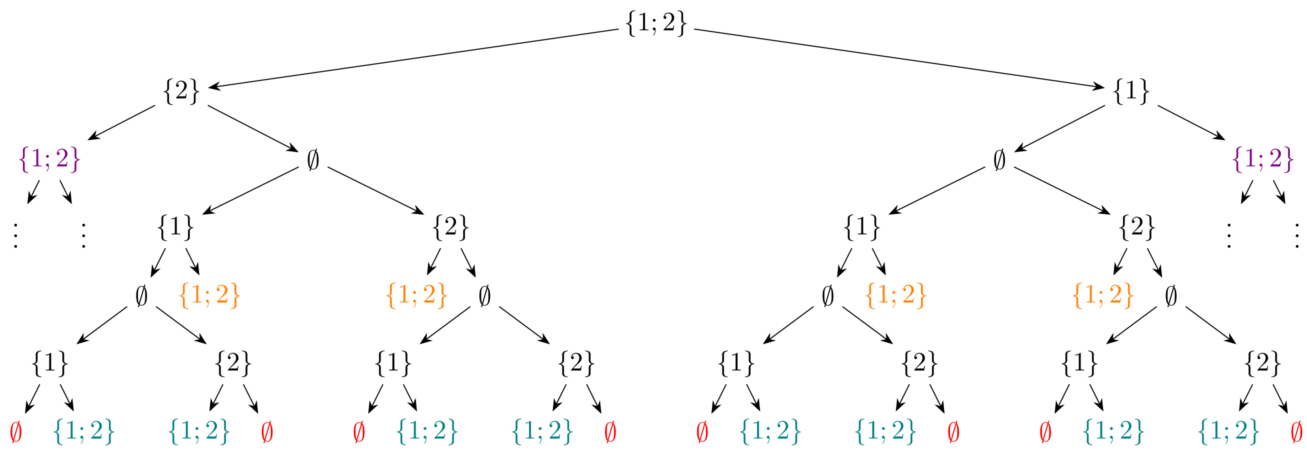
19. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(B_{2k} = 3) = \frac{1}{8}\left((-1)^{2k} + 3\times(-1/3)^{2k} + (1/3)^{2k-1} + 1\right) = \frac{1}{8}\left(2 + 6(1/3)^{2k}\right)$.

Or, $\lim\limits_{k\to+\infty}(1/3)^{2k} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} P(B_{2k} = 3) = \frac{1}{4}.}$

20. Dans ce modèle il semble que la transformation soit réversible car les valeurs de $P(B_k = i)$ ne tendent pas vers 0 donc on semble pouvoir revenir à toutes les situations possibles.

II.B Le cas de deux boules

21. Dans le graphe suivant
    - chaque étage du graphe représente une étape
    - les étiquettess des noeuds donnent la composition de l'urne U
    - Pour chaque noeud, la flèche de gauche est le cas où la boule 1 est choisie et changer de place.
    - une fois que l'on est revenu à la situation initiale, il est inutile de tracer le graphe, cela est figuré par $\vdots$
    - en violet l'événement $R_3 = 2$, en orange l'événement $R_3 = 4$ et en bleu l'événement $R_3 = 6$. L'événement $R_3 = 0$ apparait en rouge.



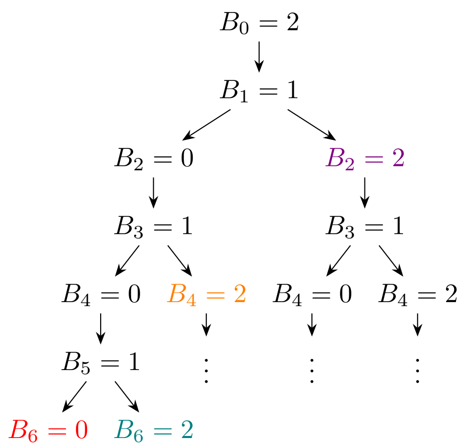
On constate que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_3 = 2) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{union disjointe et indépendance} \\
&= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(R_3 = 4) &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(R_3 = 6) &= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{8} \\
\mathbb{P}(R_3 = 0) &= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_3 = 1) = \mathbb{P}(R_3 = 3) = \mathbb{P}(R_3 = 5) = 0,\ \mathbb{P}(R_3 = 2) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(R_3 = 4) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(R_3 = 6) = \mathbb{P}(R_3 = 0) = \frac{1}{8}}$$

Cette approche est naturelle, mais le graphe obtenu devient vite très gros et la méthode ne pourra pas être généralisé dans la question suivante. Il faut comprendre que ce qui compte n'est pas la composition de l'urne U mais le nombre de billes qu'elle contient On obtient alors le graphe suivant [1]

1. mêmes conventions que le graphe précédent pour les couleurs



Dans ce graphe probabiliste toutes les arêtes sortant d'un même sommet ont le même poids, si deux arêtes sortent d'un même sommet leur poids est $1/2$, si une seule arête sort d'un sommet son poids est 1.

Une autre possibilité pour $B_6 = 2$ apparaît dans la partie non dessinée du graphe $\vdots$
On peut donc calculer facilement les probabilités demandées, par exemple

$$\mathbb{P}(R_3 = 6) = 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

22. Par construction R_M prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots,\ M\}$.
On ne déplace qu'une molécule à chaque étape donc (on peut le démontrer par récurrence) pour tout entier pair B_k prend ses valeurs dans $\{0;\ 2\}$ et pour k impair la seule valeur possible pour B_k est 1. On s'intéresse à la première fois où B_k vaut deux

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair } \mathbb{P}(R_M = k) = 0}$$

Soit $k = 2i$ un entier pair plus petit que $2M$, le premier retour à l'état initial intervient au rang k si et seulement si le nombre de boules dans l'urne U aux rangs précédents (sauf 0) à toujours été 0 ou 1 et que $[B_{2i} = 2]$ est réalisé. En utilisant la remarque précédente

$$[R_M = 2i] = [B_0 = 2] = [B_1 = 1] \cap [B_2 = 0] \cap [B_3 = 1] \cap \dots \cap [B_{2i-1} = 1] \cap [B_{2i-1} = 1] \cap [B_{2i} = 2]$$

Attention les événements de cette intersection ne sont pas indépendants, nous allons donc utiliser le théorème des probabilités composées

$$\mathbb{P}(R_M = 2i) = \mathbb{P}(B_0 = 2)\mathbb{P}_{[B_0=2]}(B_1 = 1)\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap[B_1=1]}(B_2 = 0)\cdots$$
$$\cdots\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap\dots\cap[B_{2i-2}=0]}(B_{2i-1} = 1)\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap\dots\cap[B_{2i-1}=1]}(B_{2i} = 2)$$

On remarque

- $\mathbb{P}(B_0 = 2) = 1$ d'après l'énoncé.
- $\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap\dots\cap[B_{2j-1}=1]}(B_{2j} = 0) = \dfrac{1}{2}$ si on imagine qu'une seule boule est présente dans l'urne U à l'étape $2j - 1$, il y a une chance sur deux de l'enlever (seul la composition de l'urne compte, pas les étapes précédentes).
- $\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap\dots\cap[B_{2j}=0]}(B_{2j+1} = 1) = 1$ si on imagine qu'il n'y a aucune boule dans l'urne U à l'étape $2j$, on est sûr d'en rajouter une à l'étape suivante.
- $\mathbb{P}_{[B_0=2]\cap\dots\cap[B_{2i-1}=1]}(B_{2i} = 2) = \dfrac{1}{2}$ si on imagine qu'une seule boule est présente dans l'urne U à l'étape $2i - 1$, il y a une chance sur deux d'en rajouter une.

Donc

$$\mathbb{P}(R_M = 2i) = 1 \times \underbrace{(1 \times \frac{1}{2}) \times (1 \times \frac{1}{2}) \cdots \times (1 \times \frac{1}{2})}_{i \text{ parenthèses}} = \frac{1}{2^i}$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est pair } \mathbb{P}(R_M = k) = \frac{1}{2^{k/2}}}$$

23. La variable aléatoire R_M étant à valeurs dans $\{0;\ 1;\ \dots;\ 2M\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_M) &= \sum_{0\leqslant k\leqslant 2M} k\mathbb{P}(R_M = k) \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2M \\ \text{k pair}}} k\mathbb{P}(R_M = k) + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2M \\ \text{k impair}}} k\mathbb{P}(R_M = k) \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2M \\ \text{k pair}}} k\frac{1}{2^{k/2}} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2M \\ \text{k impair}}} 0 && \text{question précédente} \\
&= \sum_{j=0}^{M} 2j\frac{1}{2^{2j/2}} && \text{changement d'indice } k = 2j \\
&= \sum_{j=1}^{M} \frac{j}{2^{j-1}}.
\end{aligned}$$

Remarque importante La grande majorité des changement d'indice que l'on effectue sur des symboles $\sum$ sont soit des "décalages" par exemple $j = k - 3$ ou des "inversions" : $j = n - k$. Le changement proposé est valide car la somme porte sur des indices pairs, il faut bien faire attention aux nouvelles bornes du $\sum$. Vous pouvez essayé de faire le même type de changement sur le $\sum$ portant sur les indices impaires (attention aux nouvelles bornes)

$$\boxed{\mathbb{E}\left(R_M\right) = \sum_{j=1}^{M} \frac{j}{2^{j-1}}.}$$

24. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a) On reconnaît la somme des termes successifs d'une suite géométrique dont la raison n'est pas 1.

$$\boxed{\text{Pour } x \in]0,1[,\ \varphi(x) = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}}$$

   b) La fonction polynomiale φ est dérivable sur son ensemble de définition. En dérivant la forme avec un $\sum$ on obtient

$$\forall x \in]0,\ 1[\qquad \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{p} kx^{k-1}$$

   En dérivant l'expression obtenue à la question précédente pour $x \in]0,\ 1[$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{-(p+1)x^p(1-x) - (-1)(1 - x^{p+1})}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(p+1)x^p + (p+1)x^{p+1} + 1 - x^{p+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} kx^{k-1} = \frac{px^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(x-1)^2}}$$

25. On remarque que la notation précédente est ambiguë on pose donc pour $x \in]0,\ 1[$

$$\varphi_p(x) = \sum_{k=1}^{p} kx^{k-1}$$

Soit x fixé dans $]0,\ 1[$, en utilisant le théorème des croissances comparées

$$\lim_{p\to+\infty} px^{p+1} = \lim_{p\to+\infty}(p+1)x^p = 0$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{px^{p+1}-(p+1)x^p+1}{(x-1)^2} = \frac{0+0+1}{(x-1)^2}$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} \varphi_p(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Or d'après les questions précédentes

$$\mathbb{E}(R_M) = \varphi_M(1/2)$$

$$\boxed{\lim_{M\to+\infty} \mathbb{E}(R_M) = 4}$$

Faire tendre M vers $+\infty$ revient à ne plus considérer de limite à notre expérience, dans ce cas le temps moyen du premier retour à la situation initiale est 4

II.C Simulations dans le cas d'un plus grand nombre de boules

26.
```
import random as rd

def simulation (N,n):
    NbBoules=N
    U=[N]
    for i in range(n):
        alea=rd.random()
        if alea< NbBoules/N: #proportion de boules dans l'urne U
            NbBoules-=1
        else:
            NbBoules+=1
        U.append(NbBoules)
    return U
```

Pour faire afficher des graphiques minimalistes

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(simulation(100,10**3))
plt.show()
```

27. a) La première situation semble irréversible, on revient plusieurs fois à la situation initiale
    b) Les deux situations suivantes ne semblent pas irréversibles, au bout d'un temps relativement court, le nombre de boules dans chacune des deux urnes oscillent autour de $N/2$.
28. O Dans se cas le temps moyen de retour à l'état initial, est

$$2^{10000}\text{ns} = 2^{10000}10^{-9}\text{s}$$

en utilisant l'approximation donnée

$$10^{2991}\text{s}$$

qui est bien plus grand que l'age de l'univers
29. Il y a réversibiité théorique mais le temps moyen de retour est bien plus grand que ce qu'il est réaliste d'observer. On remarquera de plus que 10000 molécules d'un gaz parfait aucun un volume d'environ $4\times10^{-14}\ell$ dans les conditions normales de température et de pression.