

Consignes de travail et début d'année

BCPST2

Vous connaîtrez la classe où vous êtes affectés à la rentrée. Le travail à faire et les conseils sont identiques dans les deux cas, seule changera la date des premiers cours et de la première interrogation. Pour toute(s) question(s) vous pouvez nous joindre par mail :

etournesac@gmail.com ou bcpst@lafond.eu

Début d'année

- Vous devez avoir révisé vos cours de sup sur les polynômes, les fonctions (continuité, dérivabilité, fonctions usuelles, calculs de limites, développement limités ...) et les suites. Vous pourrez aussi vous aider de la fiche résumée sur les fonctions qui vous a été distribuée.
- Préparer TOUS les exercices de la feuille de TD « Limites, continuité, ... »
- Rédiger sur une (ou plusieurs) copie(s) double(s) le problème ci-dessous.
- Lors du premier cours de mathématiques le 3 ou le 4 septembre vous aurez une petite interrogation sur des calculs très basiques : manipulations d'inégalités, calculs avec des puissances et des fractions, calculs de limite simples, calculs de dérivées. ..., ainsi que des questions de cours sur le contenu de la fiche de résumé.

Conseils pour organiser vos révisions

- Les 19, 20, 21 août : réviser vos cours de sup, et, si besoin, faire vos propres petites fiches avec les définitions, les théorèmes les plus importants, les formules (dérivées, limites, trigonométrie, équivalents, développements limités ...), ...
- À partir du 22 (hors week-end) : faire chaque jour un exercice, avancer un peu le DM et reprendre les chapitres qui sont encore fragiles.

DM1

à rendre le jour de la rentrée

Il ne faut pas hésiter à nous demander des indications par mail!

Nous pensons qu'il faut prévoir environ 4 heures de travail.

En physique et en chimie, la question de la réversibilité d'une transformation est importante. Elle peut être résumée et simplifiée à :

« Si une situation s'est produite à un moment donné, peut-elle se reproduire de façon identique ultérieurement ? »

On considérera ici l'expérience suivante : un gaz se trouve dans une enceinte fermée. Au temps $t = 0$, on ouvre un trou dans l'enceinte, donnant sur une seconde enceinte vide au départ. Le gaz va alors se diffuser dans la seconde enceinte.

Les équations de la cinématique indiquent que chaque molécule peut aller dans l'une ou l'autre des enceintes, et la transformation serait alors réversible ; a contrario, les équations de la thermodynamique impliquent une augmentation de l'entropie, qui ne peut diminuer par la suite : la transformation est alors irréversible.

Ce problème est constitué de deux parties largement indépendantes ; seule la sous-partie II.C utilisera des résultats vus dans la partie I.

Partie I. Approche thermodynamique

On considère la situation suivante : un certain nombre de molécules N se trouve dans une première enceinte rigide.

On considère le temps discrétisé, commençant au temps $n = 0$. Au temps $n = 0$, on perce dans la paroi de l'enceinte un petit trou donnant sur une deuxième enceinte de même volume, initialement vide.

On notera alors u_n (respectivement v_n) le nombre de molécules de gaz dans la première (respectivement deuxième) enceinte au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner u_0 et v_0 .
2. Justifier que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante, puis exprimer u_n en fonction de v_n .

Les principes de la thermodynamique, sous certaines hypothèses qu'on n'exposera pas ici, permettent d'affirmer que le nombre de molécules passant de la première enceinte à la seconde (respectivement de la seconde à la première) du temps n au temps $n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$, est proportionnel au nombre de molécules dans la première (respectivement seconde) enceinte au temps n . Le coefficient de proportionnalité est supposé le même au cours du temps aussi bien de la première enceinte vers la deuxième que de la deuxième vers la première, et sera noté K , $K \in]0, 1[$.

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = KN + (1 - 2K)u_n.$$

On suppose désormais que ce réel vérifie $K \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

4. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_n - \frac{N}{2}$$

est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

5. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}(1 - 2K)^n.$$

6. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on précisera.
8. Déterminer la distribution des molécules au bout d'un temps très long.
9. Avec ce modèle, la transformation est-elle réversible ?

Partie II. Approche probabiliste

On rappelle le contexte de la partie précédente : N molécules sont présentes dans une enceinte, puis on perce au temps $t = 0$ un trou donnant dans une autre enceinte. On suppose que le temps est discrétisé : les instants seront numérotés $0, 1, 2, \dots$.

Les enceintes seront ici représentées par deux urnes : l'urne U contenant les molécules au départ, l'urne V étant vide au départ.

Les molécules sont supposées être numérotées de 1 à N . À chaque instant, on suppose qu'une et une seule molécule change d'urne (le trou est supposé assez petit pour ne laisser passer qu'une seule molécule).

Pour modéliser cette évolution, on tirera au hasard uniformément un entier entre 1 et N , et on supposera que c'est la molécule portant ce numéro qui change d'urne.

On notera alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

— B_k la variable aléatoire comptant le nombre de molécules dans l'urne U à l'instant k ;

— X_k le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(B_k = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(B_k = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ où :

$\mathbb{P}(B_k = 0), \mathbb{P}(B_k = 1) \dots, \mathbb{P}(B_k = N)$ est la probabilité que la variable B_k prenne la valeur $0, 1 \dots, N$. Et $\mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $(N+1)$ lignes et 1 colonne à coefficients dans l'ensemble des réels.

II.A Le cas de trois molécules

Dans cette partie, on suppose que l'urne U contient trois molécules au départ, et l'urne V aucune. On a donc $N = 3$.

10. Donner le vecteur colonne X_0 .

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que :

$$\mathbb{P}(B_{k+1} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_k = 1) \text{ et } \mathbb{P}(B_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(B_k = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(B_k = 2).$$

12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$, avec M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

13. Calculer alors les vecteurs X_1 et X_2 .

14. Soit S la matrice définie par $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner S^2 . En déduire que S est inversible et exprimer S^{-1} en fonction de S .

15. En utilisant la commande `dot` du module `numpy` proposer un script qui calcule $S^{-1}MS$.

16. En déduire une matrice D diagonale telle que $M = SDS^{-1}$. On utilisera le script précédent en prenant en compte les approximations faites lors du calcul.

17. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_k = SD^k S^{-1} X_0.$$

18. En déduire une expression de X_k en fonction de k .

19. Calculer la limite de $\mathbb{P}(B_{2k} = 3)$ quand k tend vers l'infini.

20. Que peut-on en déduire, dans ce modèle, quant à la réversibilité de la détente de gaz ?

II.B Le cas de deux molécules

On rappelle le contexte de la partie précédente : les enceintes sont représentées par des urnes U et V , et on suppose qu'à chaque instant, une et une seule molécule passe d'une urne à l'autre. Pour modéliser cette situation, on suppose les molécules numérotées de 1 à N , et on tire aléatoirement et uniformément un entier entre 1 et N ; c'est la molécule portant ce numéro qui changera d'urne.

Dans cette partie, on suppose que $N = 2$, c'est-à-dire que l'urne U contient deux molécules au départ, et l'urne V aucune. On note toujours B_k la variable aléatoire comptant le nombre de molécules dans l'urne U à l'instant k .

On cherche dans cette partie à déterminer le temps de retour moyen à l'état initial (deux boules dans l'urne U et aucune dans l'urne V).

Notation : Soit F un sous-ensemble de \mathbb{N} . On note $\min(F)$ le minimum de cet ensemble F .

Soit alors $M \in \mathbb{N}^*$. On considère la variable aléatoire R_M comptant le nombre d'étapes jusqu'au premier retour à l'état initial si ce retour arrive durant les $2M$ premiers tirages, et qui vaut 0 sinon. Formellement, on a donc pour $M \geq 1$:

$$R_M = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \llbracket 1, 2M \rrbracket, B_k < 2 \\ \min \{k \in \llbracket 1, 2M \rrbracket \mid B_k = 2\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, si $B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 1, B_4 = 0, B_5 = 1, B_6 = 2, B_7 = 1$ et $B_8 = 2$, on aura $R_3 = 6$ et $R_4 = 6$ mais $R_2 = 0$.

21. Déterminer $\mathbb{P}(R_3 = i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (On pourra commencer par représenter les premières étapes de cette situation par un arbre, un schéma,...)
22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $k \leq 2M$, on a :

$$\mathbb{P}(R_M = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

23. En déduire que : $\mathbb{E}(R_M) = \sum_{j=1}^M \frac{j}{2^{j-1}}$.

24. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a) On définit la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi :]0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^p x^k. \end{aligned}$$

Donner une expression sans symbole \sum de la fonction φ .

b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^p kx^{k-1} = \frac{px^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(x-1)^2}$$

25. En déduire la limite quand $M \rightarrow +\infty$ de $\mathbb{E}(R_M)$. Que représente cette quantité ?

II.C Simulations dans le cas d'un plus grand nombre de molécules

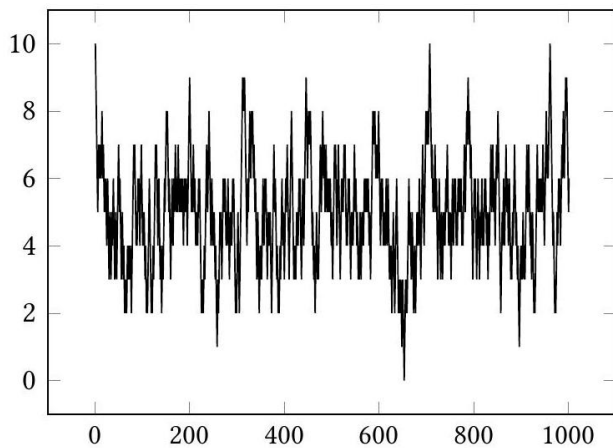
26. Écrire une fonction python `simulation(N,n)` qui prend en argument un entier non nul N qui, comme dans le reste de l'énoncé, représente le nombre total de molécules, initialement toutes dans l'urne U , et un entier non nul n qui représente un nombre d'étapes, et qui renvoie une liste d'entiers représentant une simulation du nombre de molécules présente dans l'urne U à chaque étape pendant les n premières étapes.

On pourra utiliser le générateur aléatoire `random.random()` qui renvoie un réel choisis uniformément dans $[0, 1[$.

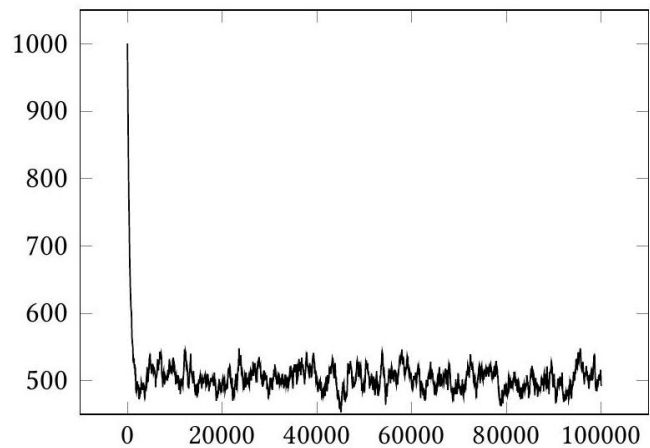
On admet que les résultats précédents restent vrais dans le cas de N molécules, $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque c'est-à-dire :

- la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n = N)$ est non nulle ;
- le temps de retour moyen à la situation initiale est 2^N .

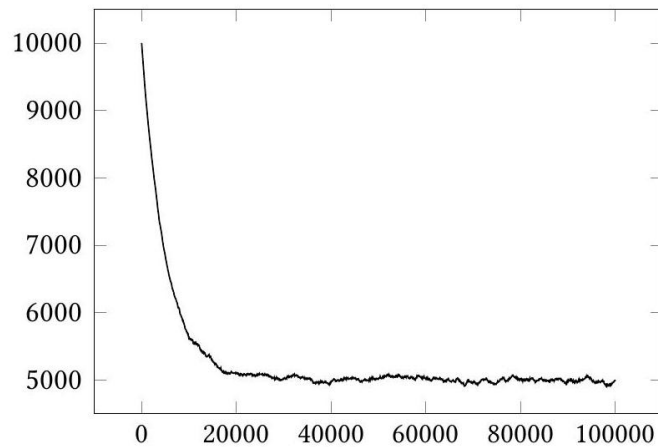
Une simulation informatique permet d'obtenir les graphiques suivants, indiquant en abscisse le nombre d'étapes et en ordonnée le nombre de boules dans l'urne U .



$N = 10$



$N = 1000$



$N = 10000$

27. Pour le cas $N = 10$ la situation est réversible, deux fois (autour de la 700 étapes et de 1 950 étape) on peut trouver 10 boules dans l'urne U . Dans les deux autres cas la situation semble irréversible. Le nombre de boules dans l'urne U diminue rapidement pour se stabiliser autour de $N/2$. Ce qui semble contradictoire avec l'affirmation de l'énoncé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n = N) \neq 0$$

28.

$$1\text{ns} = 10^{-9}\text{s}$$

le temps moyen de retour à l'état initial est

$$2^{10000} \times 10^{-9} \text{s}$$

En utilisant l'approximation donnée

$$2^{10000} \times 10^{-9} = (2^{10})^{1000} \times 10^{-9} \sim 10^{3000-9} = 10^{2991}$$

Le temps moyen de retour à l'état initiale est 2 ordre de grandeur plus grand que le temps écoulé depuis le début de l'existence de l'univers.

De plus $N = 10000$ est très petit, pour un gaz parfait, aux température et pression usuelles occupe un volume d'environ $4 \times 10^{-14} \text{mm}^3$

29. Expliquer alors le paradoxe apparent entre les simulations et les résultats précédents.