Lycée Champollion, Grenoble **2024-2025**
T.D. de Mathématiques BCPST Spé 2

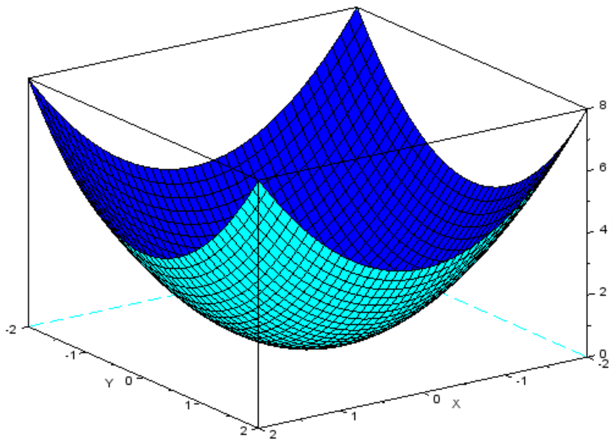
Révisions : fonctions de deux variables

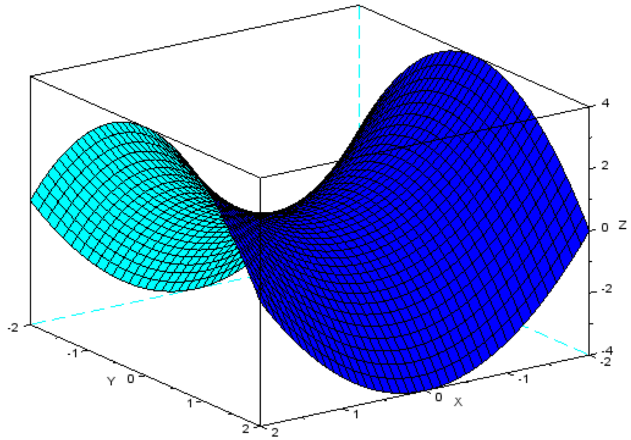
Préliminaires

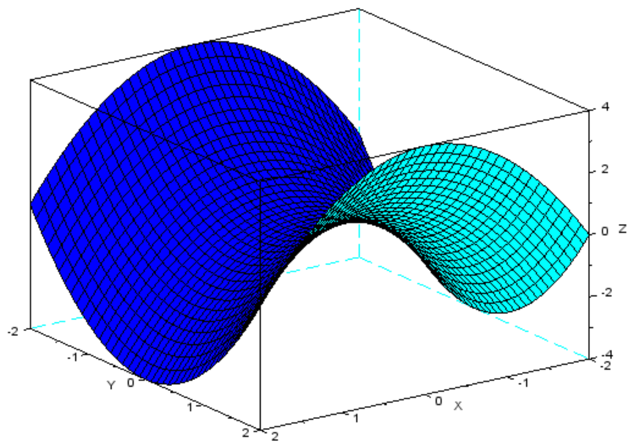
Exercice 1.
Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -x^2 + y^2 \end{array}$$

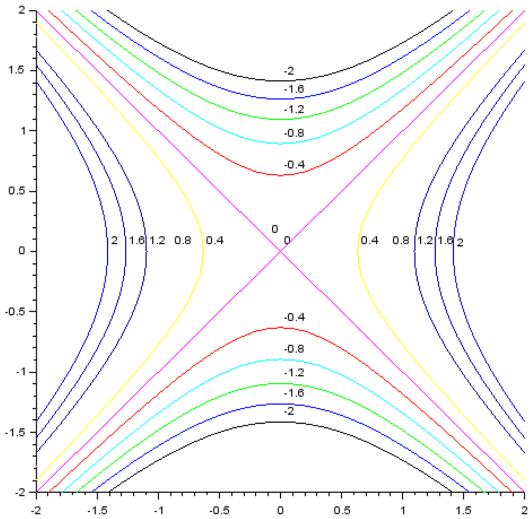


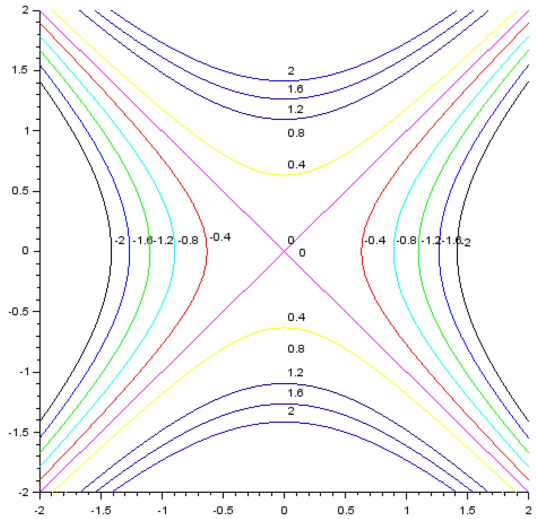


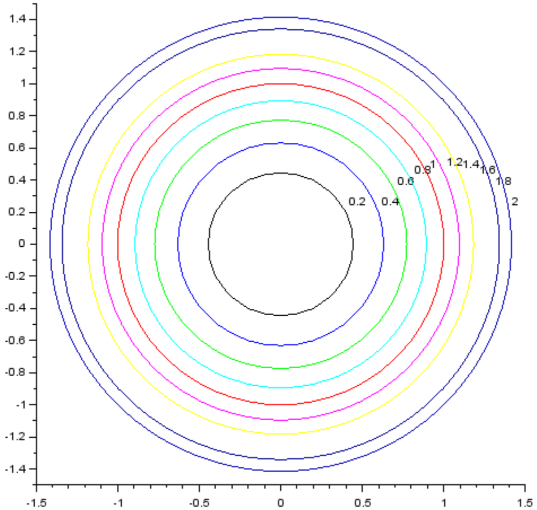


Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.

Exercice 2.
Pour les fonctions de l'exercice précédent nous avons tracé les lignes de niveau. Associer chaque graphe à sa fonction (x est en abscisses et y en ordonnées).





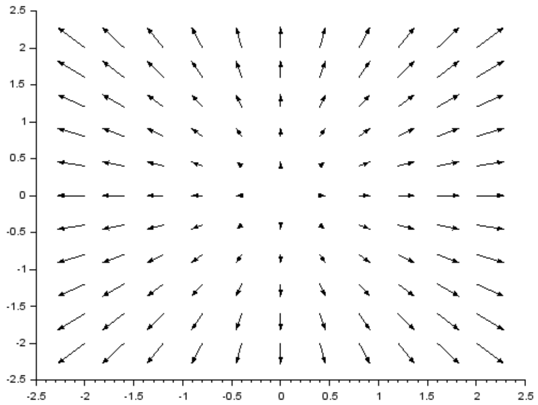


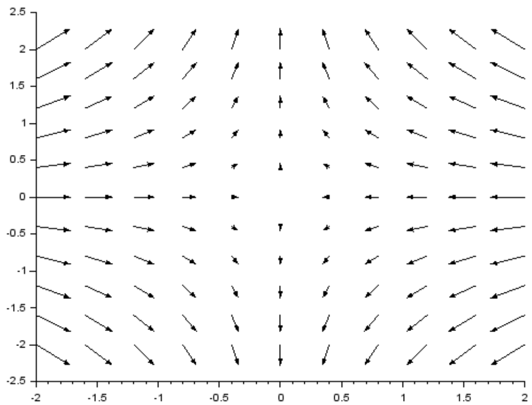
Dérivabilité

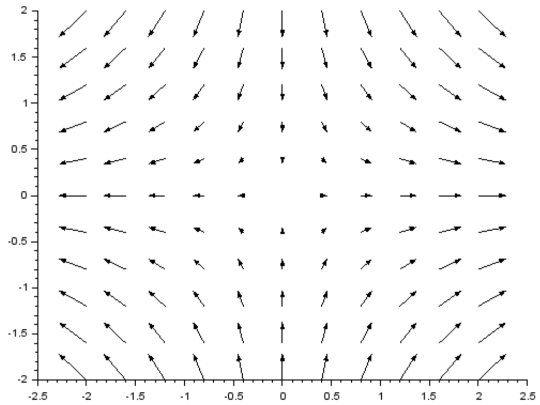
Exercice 3.
Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur un ensemble que l'on déterminera.

1. $(x,\ y) \mapsto x$.
2. $(x,\ y) \mapsto y$.
3. $(x,\ y) \mapsto x + y$.
4. $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^3$.
5. $(x,\ y) \mapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$.
6. $(x,\ y) \mapsto \exp\left(x^2 + y^2\right)$.
7. $(x,\ y) \mapsto \exp\left(\mathrm{e}^x + y\right)$.
8. $(x,\ y) \mapsto \cos(x)\sin(y)$.
9. $(x,\ y) \mapsto \cos(x + y)$
10. $(x,\ y) \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

Exercice 4.
Pour les fonctions de l'exercices 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.







Exercice 5.
Calculer le gradient puis donner l'approximation pur des petites variations en $(1,\ 1)$ et l'équation du plan tangent. des fonctions suivantes

1. $(x,\ y) \longmapsto xy$
2. $(x,\ y) \longmapsto x^2 + y^2$
3. $(x,\ y) \longmapsto x^2 - y^2 + xy$
4. $(x,\ y) \longmapsto x^2y^2 + xy^3$
5. $(x,\ y) \longmapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6. $(x,\ y) \longmapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$

Exercice 6.
Reprendre l'exemple précédent en remplaçant $(1,\ 1)$ par $(1,\ -1)$.

Dérivées d'ordre 2

Exercice 7.
Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

Problèmes

Exercice 8.
Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$. Calculer $m = f\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$

2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

3. (a) Développer $2(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2$.

   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2y}+2\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{y}$$

   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)\geqslant -\frac{1}{6}$.

   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x,y\right)=x\,\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$

1. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f

   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A=(-1,0)$.

2.

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

4. (a) Montrer que : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x,y\right)\geqslant x\,\mathrm{e}^{x}$.

   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\,\mathrm{e}^{x}$, conclure que le point critique trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.
On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & (1+x+y)^2-(1+x-y)^2 \end{array}$$

1. Trouver tous les points critiques de f.
2. tracer le tableau de variations de

$$h: t\mapsto f(-1+t,t) \qquad g: t\mapsto f(-1+t,-t)k: t\mapsto f(-1+t,0)$$

3. Le point $(-1,0)$ est il un extremum de f ?

Exercice 11 (⛰).
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi\left(x\right)=2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall\left(x,y\right)\in\,]0;+\infty[\times]0;+\infty[,\quad f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{x+4y}\ln\left(xy\right)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi\left(x\right)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi\left(x\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi\left(x\right)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2)\simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi\left(\alpha\right)=\varphi\left(\beta\right)=0$$

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

Points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=4f\left(x,y\right)+\frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta,\dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=\frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

Exercice 12 (Fonctions homogènes ⛰).
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. On définit, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto g(t)=f(tx,ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que f est homogène, c'est à dire $f(tx,ty)=tf(x,y)$ pour tous $x,y,t\in\mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

(b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

(c) Étudier la réciproque.

Exercice 13 (Fonctions invariantes par translation).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et vérifiant :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3,\ f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 14 (Fonctions harmoniques).
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si pour tout (x, y)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$.Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.