DL mathématiques n˚01
Pour le lundi 16 septembre 2024

On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f.
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise `python` pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :
   Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.
2. (a) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.
   (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

Partie B

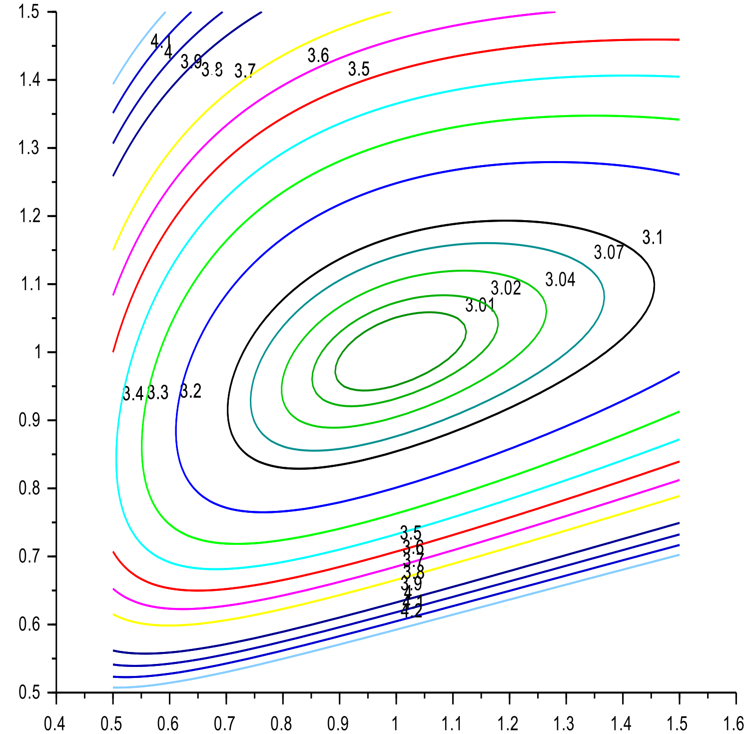
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$[et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $\quad h_n(x) = 4 \quad$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

   (b) En déduire que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geqslant 4.$
   (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.



4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty.$
   En déduire une contradiction.
   (c) Déterminer la limite de (v_n).

Les questions suivantes sont facultatives

5. (a) Montrer que : $\qquad \forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$
   (b) Écrire une fonction `python` d'en-tête `h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.
   (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n):
```

```
a=1
b=3
while (b-a)>10**(-5):
    c=(a+b)/2
    if h(n,c)>   :
            ........
    else:
             ........

    return ..
```

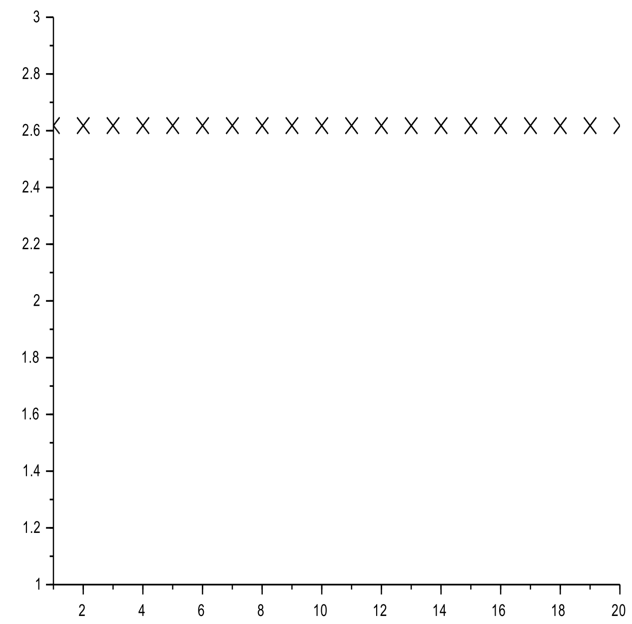
(d) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt

Y=[]
for k in range(1,21):
    Y.append(v(k)**k))

plt.plot(Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer?

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.