ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce TD, les notations pour les fonctions inconnues et les variables peuvent changer d'un exercice à l'autre.

Équations linéaires

Exercice 1 (Premier ordre linéaire)**.**
Résoudre les équations suivantes, on donne une indication pour trouver la solution particulière :

1. $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$ *indication* $y_p : t \mapsto a\cos(2x) + b\sin(2x))$
2. $y'(x) + 2xy(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ *indication* variation de la constante.
3. $y'(x) + 2\tan(x)y(x) = \sin(2x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *indication* variation de la constante.
4. $y' + x^2 y = -x^2$ *indication* y_p constante.
5. $y'(x) - \dfrac{x}{1+x^2}y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $]1; +\infty[$ *indication* y_p polynomiale
6. $y'(x) - \dfrac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$ sur $]1; +\infty[$ *indication* variation de la constante ou solution simple.

Exercice 2 (Second ordre, homogène)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 3x' - x = 0$
2. $x'' - 2x' + x = 0$
3. $x'' - 2x + 2x = 0$

Exercice 3 (Second ordre)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$,
2. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$, on cherchera une solution particulière sous la forme $P(x)\mathrm{e}^x$ où P polynomiale.
3. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$, on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax\cos(x)\mathrm{e}^x$
4. $y'' + y' + y = \cos x$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$.

Exercice 4 (Conditions aux bords)**.**
Soit ω un réel strictement positif, a et b sont des réels et on pose $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. On cherche à résoudre l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad y(0) = a \qquad y(T) = b$$

1. Résoudre l'équation homogène sans condition.
2. À quelle condition sur a et b l'équation admet elle une solution, cette solution est elle unique ?
3. On change les conditions initiales par $y(0) = a \qquad y(T/2) = b$, quelles sont les solutions ?

Équation autonomes

Exercice 5.
Résoudre

1. $x'(t) = 1 + x^2(t)$
   indication On commencera par diviser par $1 + x^2$ après justification
2. Chercher les solutions à valeurs dans $]-1; 1[$ de l'équations $x'(t) = 1 - x^2(t)$

Exercice 6 ().
Résoudre

1. $x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)} - 1$.
   Poser $z(t) = x(t) + t$,
2. $t.x'(t) = x(t).\Big(1 + \ln\big((x(t)) - \ln(t)\big)$.
   Poser $z(t) = \ln(x(t)/t)$.
3. $t.x'(t) = x(t).\Big(1 + \ln\big(\frac{x(t)}{t}\big)\Big)$.

Recollement

Exercice 7 (Recollement détaillé)**.**

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.
2. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

   Résoudre cette équation sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$.
3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.
On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Sur quel(s) intervalle(s) connaît-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (Bonus, non détaillé)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = \sqrt{1+x^2}$,
2. $f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $f(0) = 2$.
3. $xf'(x) - f(x) = \ln(x)$,
4. $xf'(x) - f(x) = x^3$,
5. $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 + 2x^2$,
6. $(1-x^2)f'(x) + xf(x) = 0$,

Pour aller plus loin

Exercice 10 (Changement de fonction inconnue)**.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+\mathrm{e}^x)y'' + 2\mathrm{e}^x y' + (2\mathrm{e}^x + 1)y = x\mathrm{e}^x$ en posant $z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)$;
2. Sur $]0; +\infty[$ résoudre $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z(x) = xy(x)$.

Exercice 11 (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3.)**.**
Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs réelles de (E_1). On pose $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g.
2. Résoudre (E_2).
3. Résoudre (E_1).

Exercice 12.
On cherche à déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système [1] suivant :

$$\begin{cases} y' - y &= z \\ z' + z &= 3y \end{cases}$$

1. On suppose que y et z sont des solutions de ce système, trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par y.
2. Résoudre cette équation, puis trouver l'expression de z.
3. Compléter ce raisonnement "Analyse-Synthèse" par la partie "synthèse".

Exercice 13 (Autre utilisation de la variation de la constante)**.**
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(\mathscr{E}) \quad x^2y'' - 5xy' + 9y = 4x + 9.$$

1. Les deux équations doivent être simultanément vérifiées

1. Chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^r$ et utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver toutes le solutions de l'équation homogène.
2. Trouver les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 14 (Équations fonctionnelles)**.**
résoudre les équations suivantes

1. $f'(x) + f(x) = 2f(0)$
2. $f(x) + \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$
3. $f'(x) + f(-x) = 0$

Exercice 15.
On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ sur $]-1; +\infty[$:

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - xf(x) = (1+x)^2\mathrm{e}^x$$

1. Vérifier que la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène associée $(\mathscr{E}_0)$. En déduire toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{E}_0)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

Exercice 16.
On considère les équations différentielles :

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = x\mathrm{e}^x. \qquad (\mathscr{E})$$
$$t^2 f"(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t) \qquad (\mathscr{F})$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$.
2. Montrer que $(\mathscr{E})$ admet une solution particulière de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ avec P un polynôme que l'on déterminera. Puis résoudre $(\mathscr{E})$.
3. Si $t \mapsto f(t)$ est une solution de $(\mathscr{F})$, quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $x \mapsto f\left(\mathrm{e}^x\right)$? En déduire les solutions de $(\mathscr{F})$.

Exercice 17 (Forme théorique des solutions)**.**
On s'interesse à l'équation différentielle autonome

$$y' = F(y)$$

où F est une fonction continue, ne s'annulant pas sur un intervalle I

1. Montrer qu'il existe une fonction G une primitive de $\dfrac{1}{F}$ sur I
2. Démontrer que G induit une bijection de I vers un intervalle J que l'on ne cherchera pas à calculer
3. Soit λ un réel fixé, on pose
$$y : t \mapsto G^{-1}(t+\lambda)$$
Montrer que y est solution de l'équation différentielle.
4. Essayez de démontrer la réciproque.

Attention : ce résultat n'est pas un résultat qu'on utilise en pratique pour résoudre des équations différentielles