DL mathématiques n°01
Réponses

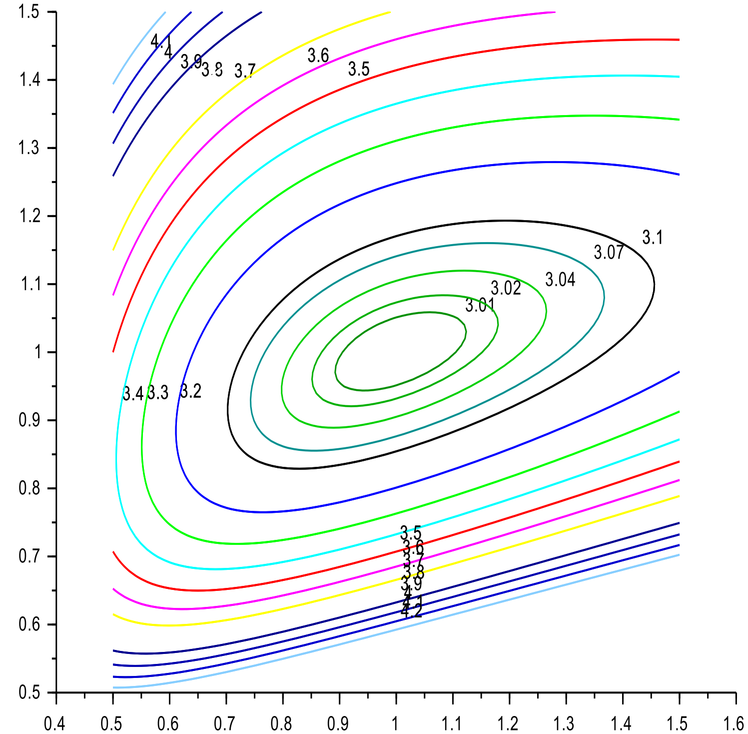
On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad f(x,y = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f.
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :
   Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.



RÉPONSE:

La fonction semble admettre un minimum local aux environs du point (1,1), dont la valeur est environ 3

❀

2. (a) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

RÉPONSE:

La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x}{y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ comme quotient défini de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ * \times \mathbb{R}_+^*$. De même pour $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $(x,y) \mapsto y^2$ qui est polynomiale

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}.}$$

❀

   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{Pour } (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = -2\frac{x}{y^3} + 2y\ .}$$

Soit x et y strictement positifs

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique } &\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} &= 10 \\ -2\dfrac{x}{y^3} + 2y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 &= x^2 \\ -2\dfrac{x}{y^3} + 2y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ -2\dfrac{x}{y^3} + 2y &= 0 \end{cases} \quad \text{car } x \text{ et } y \text{ sont positifs} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ -2\dfrac{y}{y^3} + 2y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ y^4 &= 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ y &= 1 \end{cases} \quad \text{car } y > 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Le seul point critique est } (1,1).}$

❀

(c) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

RÉPONSE:

$\boxed{\text{Pour } (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{6x}{y^4} + 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\dfrac{2}{y^3}}$

❀

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1][$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

RÉPONSE:

h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}}$$

Soit $x$réel strictement positif

$$
\begin{aligned}
h_n'(x) > 0 &\Leftrightarrow nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} > 0 \\
&\Leftrightarrow x^{n-1} - \frac{1}{x^{n+1}} > 0 && \text{car } n > 0 \\
&\Leftrightarrow x^{2n} - 1 > 0 && \text{car } x > 0 \\
&\Leftrightarrow x^{2n} > 1 \\
&\Leftrightarrow x > 1 && \text{car } x > 0
\end{aligned}
$$

❀

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $\quad h_n(x) = 4 \quad$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

RÉPONSE:

h_n est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ et $\lim\limits_{0} h_n(x) = +\infty$ et $h_n(1) = 3$ donc d'après le théorème de la bijection monotone il existe une unique réel u_n dans $]0;1[$ tel que $h_n(u_n) = 4$. De même h_n est continue strictement croissante sur $]0;+\infty[$ $h_n(1) < 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$ donc d'après le théorème de la bijection monotone il existe un unique réel v_n de $]1;+\infty[$ tel que $h_n(v_n) = 0$

On constate aussi que 1 n'est pas solution de cette équation.

❀

3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\
&= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n} \\
&= \frac{x^{2n+2}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{x^{2n+1}}{x^{n+1}} - \frac{x}{x^{n+1}} \\
&= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\
&= \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} + 1 - x}{x^{n+1}} \\
&= \frac{x^{2n+1}(x-1) + 1 - x}{x^{n+1}} \\
&= \frac{\left(x^{2n+1}-1\right)(x-1)}{x^{n+1}}
\end{aligned}$$

❀

(b) En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Dans l'égalité précédente en prenant $x = v_n$

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{\left(v_n^{2n+1}-1\right)(v_n-1)}{v_n^{n+1}}$$

Or comme $v_n > 1$ la quantité de droite est positive et donc

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0$$

Par définition de v_n $h_n(v_n) = 4$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4}$$

❀

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$h_{n+1}(v_n) \geq 4$$

donc

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

et comme h_{n+1} est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans cet intervalle.

$$v_n \geqslant v_{n+1}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$$

❀

4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

RÉPONSE:

La suite est décroissante et minorée par 1, donc d'après le théorème de la limite monotone (v_n) converge vers une réel $\ell \geqslant 1$.

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers une réel } \ell \geqslant 1.}$$

❀

(b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

RÉPONSE:

Supposons que $\ell > 1$
Comme la suite est décroissante de limite ℓ ,pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \geqslant \ell^n > 0$$

et donc

$$v_n^n \geqslant l = \ell^n > 0$$

Comme $\ell > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$h_n(v_n) = 4$$

donc

$$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$$

En utilisant le résultat précédent et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient

$$+\infty + 1 + 0 = 4$$

$$\boxed{\text{Supposer } \ell > 1 \text{ amène à une contradiction.}}$$

❀

(c) Déterminer la limite de (v_n).

RÉPONSE:

On sait que $\ell \geqslant 1$ et que $\ell > 1$ est impossible donc

$$\boxed{\ell = 1}$$

❀

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$

RÉPONSE:

On constate que $h_n(3) = 3^n + 1 + \dfrac{1}{3^n} > 3 + 1$ on a donc

$$h_n(v_n) < h_n(3)$$

et comme h_n est croissante sur $]1;+\infty[$

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3}$$

❀

(b) Écrire une fonction python d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

RÉPONSE:

```
def h(n,x):
    return x**n+1+1/(x**n)
```

❀

(c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10**(-5):
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)>4:
            b=c
        else:
            a=c

    return a
```

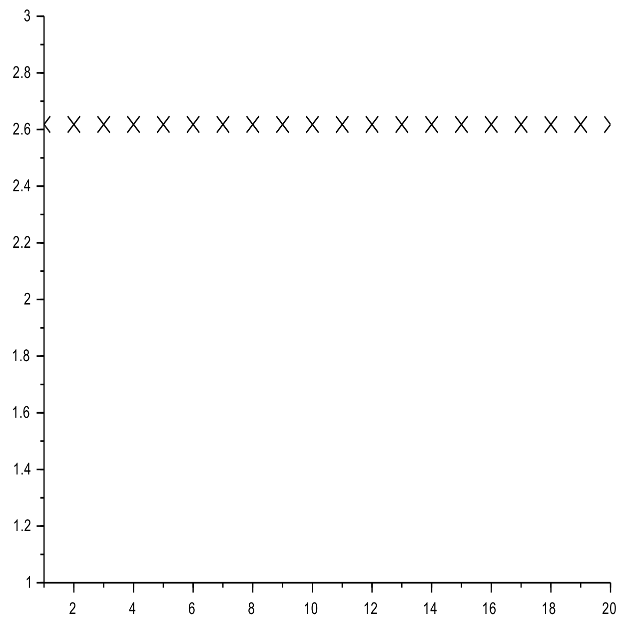
(d) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt

Y=[]
for k in range(1,21):
    Y.append(v(k)**k))

plt.plot(Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :
Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer?



RÉPONSE:

Le programme calcule des valeurs approchées de v_n^n pour $n \in [\![1,20]\!]$, les stockant dansune liste puis les affiche sous forme de graphe
La suite (v_n^n) semble être constante.

❀

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $h_n(v_n) = 4$ donc

$$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$$

en posant $u = v_n^n$

$$u + 1 + \frac{1}{u} = 4$$

donc u vérifie l'équation

$$u^2 + u + 1 = 4u$$

i.e.

$$u^2 - 3u + 1 = 0$$

Après résolution les deux solutions de cette équation sont $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
On sait que

$$2 < \sqrt{5}$$

donc

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$$

Comme v_n est plus grand que 1, on obtient que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

❀

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

RÉPONSE:

Pour n entier naturel non nul

$$v_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lim v_n = \mathrm{e}^0 = 1}$$

❀