RÉVISIONS : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Exercice 11 (⛰).
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad f(x, y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)$$

Or par croissances comparées

$$\lim_{0^+} x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

donc par opérations

$$\boxed{\lim_{0^+}\varphi = +\infty, \text{ la courbe représentative de } \varphi \text{ admet une asymptote verticale}}$$

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Cette première limite n'est pas une forme indéterminée

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty}$$

Une utilisation des croissances comparées montre que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = 0}$$

La courbe n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$, on peut dire que la courbe admet une *branche parabolique d'axe Ox* (notion hors programme).

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

RÉPONSE:

Par opérations sur des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour } x \in \mathbb{R}_+^* \ \varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

On en déduit

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(1/2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

RÉPONSE:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = -4\ln 2 + \frac{1}{2}$$

D'après l'indication cette quantité est négative.
La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, de plus $0 \in]\varphi(1/2); +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un (unique) réel β dans $]1/2; +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$. De même en appliquant le théorème de la bijection sur $]0; 1/2[$ on prouve l'existence de α.

❀

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

RÉPONSE:

```python
import numpy as np

def phi(x):
        return np.log(x)
def dicho(f,a,b,eps):
        while b-a>eps:
                c=(a+b)/2
                if f(c)*f(a)<0: #signe contraire
                        b=c
                else:
                        a=c
        return a,b
print(dicho(phi,0.0001,0.5,10**-2))
```

❀

Points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. On montre de la même façon que $(x, y) \mapsto \exp(x + 4y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. Par produit

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]0; +\infty[\times]0; +\infty[.}$$

❀

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$

RÉPONSE:

Soit (x, y) dans l'ensemble de définition de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \times e^{x+4y}\ln(xy) + \varepsilon^{x+4y}\frac{y}{yx} \qquad \text{dérivée produit}$$
$$= f(x, y) + \varepsilon^{x+4y}\frac{1}{x}$$

De même pour la deuxième dérivée première

$$\boxed{\text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}}$$

❀

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

RÉPONSE:

Attention : On ne demande pas de trouver tous les points critiques mais de vérifier que les deux points donnés sont des points critiques.
On remarque que les points $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont dans $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
En utilisant le résultat précédent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\
&= \mathrm{e}^{2\alpha}\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} && \text{définition de } f \\
&= \mathrm{e}^{2\alpha}\ln\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\
&= \mathrm{e}^{2\alpha}\left(2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \mathrm{e}^{2\alpha}\varphi(\alpha) \\
&= 0 && \text{définition de } \alpha
\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = 0$$

$$\boxed{\text{les points } \left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) \text{ et } \left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) \text{ sont des points critiques de } f \text{ sur }]0;+\infty[\times]0;+\infty[.}$$

❀

4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}
\end{cases}$$

RÉPONSE:

Pour (x,y) dans le domaine de définition

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x,y) &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}\right) && \text{question 2, écriture peu rigoureuse} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} && \text{linéarité, dérivée d'un produit} \\
&= f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} && \text{question 2, cette forme n'est pas utile pour la suite}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } (x,y)\in]0;+\infty[^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}}$$

En utilisant l'avant dernière forme obtenue :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) + -\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \\
&= 0 + -\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} && \text{car } \left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) \text{ point critique}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}}$$

Les autres calculs sont similaires

❀