Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice : Étude d'une fonction de deux variables

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a, d'une part :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\ &= x \times \frac{1}{x} + x \times \frac{1}{y} + y \times \frac{1}{x} + y \times \frac{1}{y} \quad \text{en développant} \\ &= 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\ &= (x+y)\left(\frac{y+x}{xy}\right) \quad \text{en réduistant au même dénominateur} \\ &= \frac{(x+y)^2}{xy}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{(x+y)^2}{xy}.}$$

2. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{y}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ d'après nos connaissances sur les fonctions usuelles.
Donc, par somme et produit, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}.}$
Il était aussi possible de rédiger cette question avec l'une des expressions de f trouvées dans la question précédente.

3. a) En utilisant la première expression de f de la question 1., pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}.}$$

b)

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f &\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{y} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 y} = 0 \\ \dfrac{y^2 - x^2}{x y^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } \underbrace{x = -y}_{\text{impossible}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ admet bien une infinité de points critiques, tous les couples } (x,x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^{+*}.}$$

4. a) On a $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4xy \leqslant (x+y)^2.}$

   b) Soit $(a,a) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ un point critique de f. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,a) &= \frac{(x+y)^2}{xy} - 4 \\ &= \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy} \\ &\geqslant 0, \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, $f(x,y) \geqslant f(a,a)$, ce qui signifie que f admet un minimum global en (a,a).

   $\boxed{f \text{ admet un minimum global égal à 4 et atteint en chacun de ses points critiques.}}$

5. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, on sait que si elle admet un maximum, local ou global, en un point alors ce point est un point critique de f.

   Nous avons vu qu'en tous ses points critiques f admet un minimum global, donc

   $\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum, local ou global.}}$

6. On peut remarquer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$g(x,y) = \ln((x+y)^2) - \ln(xy) = \ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right) = \ln\left(f(x,y)\right).$$

   D'après la question précédente, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, $f(x,y) \geqslant 4$.

   Donc, par croissance de la fonction ln, $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ g(x,y) \geqslant \ln(4) = 2\ln(2).}$

Problème : Étude d'un modèle d'évolution du nombre de feuilles d'une plante

Partie I

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

2. a) La fonction F est polynomiale en a et b donc c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   b) On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = -2n\bar{y} + 2na + 2nb\bar{x}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x - i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

   c) La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un pavé ouvert. On sait donc que, si F admet un extremum en un point, ce point est obligatoirement un point critique de F.

   Cherchons donc les points critiques de F, c'est-à-dire les solutions de l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}F(a,b) = (0,0)$.

   On obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(a,b)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b)=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b)=0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\bar{y}+a+b\bar{x}=0\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\bar{y}-b\bar{x}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{y}\bar{x}-b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\bar{y}-b\bar{x}\\ \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{y}\bar{x}\end{array}\right.$$

Or on remarque que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{y}\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i-\bar{x})$.

Et d'après la question 1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\neq 0$, car les x_i sont distincts.

Ainsi, le seul point où F est susceptible d'admettre un extremum est le point $(\hat{a},\hat{b})$ où

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\quad\text{et}\quad\hat{b}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i-\bar{x})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

3. $F(a,b)$ est égal à la somme des distances au carré entre les points (x_i,y_i) (points expérimentaux) et les points (x_i,ax_i+b), c'est-à-dire les points situés sur la droite d'équation $y=ax+b$.

   Les coefficients $(\hat{a},\hat{b})$ minimisent cette somme de distances.

   La droite d'équation $y=\hat{a}x+\hat{b}$ est donc la droite de régression linéaire (ou droite des moindres carrés) des valeurs de y (nombre de feuilles) par rapport à celles de x (temps thermique).

4. a) Il suffit ici de sommer tous les éléments de la liste puis de diviser le résultat obtenu par le nombre d'éléments contenus dans la liste.

```
def moy(L):
    m=0
    for l in L:
        m+=l
    return m/len(L)
```

   b) (i) Vrai
      (ii) Faux
      (iii) Faux
      (iv) Vrai
      (v) Faux

   c)
```
def Bchap(x,y):
    n=len(x)
    xbar=moy(x)
    num=0
    denom=0
    for k in range(n):
        num+=y[k]*(x[k]-xbar)
        denom+=(x[k]-xbar)**2
    return num/denom
```

   d)
```
def Achap(x,y):
    return moy(y)-Bchap(x,y)*moy(x)
```

Partie II

5. a) Pour x au voisinage de x, on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

b) En appliquant la formule précédente à la fonction $t \mapsto u(t + x_i)$ et on obtient :

$$u(t + x_i) = u(x_i) + u'(x_i)t + \frac{u''(x_i)}{2}t^2 + \frac{u^{(3)}(x_i)}{3!}t^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{4!}t^4 + o(t^4).$$

c) En remarquant que $x_i + h = x_{i+1}$ et $x_i - h = x_{i-1}$, on obtient à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 + \frac{u^{(3)}(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}h^4 + o(h^4), \\ \text{et} \quad u_{i-1} &= u_i - u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 - \frac{u^{(3)}(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}h^4 + o(h^4). \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités on obtient :

$$\begin{aligned} u_{i+1} + u_{i-1} &= 2u_i + u''(x_i)h^2 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{12}h^4 + o(h^4) \\ \Rightarrow u''(x_i) &= \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} - \frac{u^{(4)}(x_i)}{12}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

On a bien obtenu la relation demandée avec $e(h) = -\frac{u^{(4)}(x_i)}{12}h^2 + o(h^2)$.

6. a) Dans cette question, la fonction u est la fonction $x \mapsto a_1 + b_1 x$ et les dérivées seconde et quatrième de cette fonction sont nulles. On obtient donc, avec la question 5.c. :

$$0 = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + o(h^2) \Leftrightarrow D_i = o(h^2).$$

Ce qui est étonnant dans cette question, c'est que par le calcul on aurait trouvé $D_i = 0$.

b) On vient donc de voir que lorsque x_i, x_{i-1} et x_{i+1} sont dans la même phase, D_i est extrêmement petit. Ainsi, en calculant toutes les valeurs de D_i, on pourra identifier les deux changements de phases en repérant les deux valeurs de D_i qui sont significativement non nulles.

7. a) La fonction `Mystere` retourne l'indice dans la liste `L` de l'élément le plus grand cette liste. Si ce maximum est présent plusieurs fois dans la liste, la fonction `Mystere` renvoie le premier indice de ce maximum.

b) (i) Si on dispose d'un algorithme de tri, on commence par construire une nouvelle liste dans laquelle on met la liste `L` triée. On récupère alors les deux dernières valeurs de cette liste triée, puis on recherche les indices de ces deux valeurs dans la liste `L` initiale.

(ii)
```
def DeuxMax(L) :
    """retourne [0,0] si la liste est vide"""
    n = len(L)
    p1 = Mystere(L)
    p2 = 0
    for k in range(1,n) :
        if k!=p1 and L[p2]<L[k]:
            p2=k
    return([p1,p2])
```

8. a) On a ici :

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{2} \\ &= \frac{a_1 + b_1(x_i + h) + (-1)^{i+1}\varepsilon - 2(a_1 + b_1 x_i + (-1)^i \varepsilon) + a_1 + b_1(x_i - h) + (-1)^{i-1}\varepsilon}{h^2} \\ &= -\frac{4(-1)^i \varepsilon}{h^2}. \end{aligned}$$

b) Si $x_i = T_1$, on a $D_i = \dfrac{b_1 - b_2}{h} - \dfrac{4(-1)^i \varepsilon}{h^2}$.

ε étant supposé suffisamment petit, on considère que $\dfrac{4(-1)^i\varepsilon}{h^2}$ est négligeable devant $\dfrac{b_1 - b_2}{h}$ (qui n'est pas nul car les pentes des droites des différentes phases sont différentes). On peut alors chercher avec la fonction python précédente les indices des deux maximums de la liste des $|D_i|$ (valeurs absolues des D_i). Les temps thermiques correspondants s'obtiennent ensuite en multipliant ces indices par h.

9. a) Soit $2 \leqslant i \leqslant n-1$. On a alors :

$$\begin{aligned} y_i^1 &= y_i^0 + \alpha \frac{y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0}{h^2} \\ &= a_1 + b_1 x_i + \varepsilon_i - \frac{4\alpha}{h^2}\varepsilon_i \\ &= a_1 + b_1 x_i + \left(1 - \frac{4\alpha}{h^2}\right)\varepsilon_i. \end{aligned}$$

b) Afin de réduire le bruit il faut avoir $-1 < 1 - \dfrac{4\alpha}{h^2} < 1$. Cela correspond à $\alpha \in \left]0; \dfrac{h^2}{2}\right[$.

Pour $\alpha = \dfrac{h^2}{4}$, on supprime le bruit.

c)
```
def Lisse(Y,a,h):
    n=len(Y)
    L=[Y[0]]
    for i in range(1,n-1):
        L.append(Y[i]+a*(Y[i-1]-2*Y[i]+Y[i+1])/h**2)
    L.append(Y[n-1])
    return L
```

d) Méthode proposée : après avoir effectué plusieurs opérations de lissages, on calcule les D_i, puis on applique la méthode du 8.b.

e) L'opération de lissage a pour conséquence d'atténuer les ruptures de pentes entre les 3 phases, donc de diminuer la valeur des D_i à l'endroit des changement de phases. On peut donc penser que cette méthode n'est pas satisfaisante.