Lycée Champollion, Grenoble **2024-2025**
T.D. de Mathématiques BCPST Spé 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce TP, les notations pour les fonctions inconnues et les variables peuvent changer d'un exercice à l'autre.

Équations linéaires

Exercice 1 (Premier ordre linéaire)**.**
Résoudre les équations suivantes, on donne une indication pour trouver la solution particulière :

1. $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$ *indication* $y_p : t \mapsto a\cos(2x) + b\sin(2x))$
2. $y'(x) + 2xy(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ *indication* variation de la constante.
3. $y'(x) + 2\tan(x)y(x) = \sin(2x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *indication* variation de la constante.
4. $y' + x^2 y = -x^2$ *indication* y_p constante.
5. $y'(x) - \dfrac{x}{1+x^2}y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $]1;+\infty[$ *indication* y_p polynomiale
6. $y'(x) - \dfrac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$ sur $]1;+\infty[$ *indication* variation de la constante ou solution simple.

Exercice 2 (Second ordre, homogène)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 3x' - x = 0$
2. $x'' - 2x' + x = 0$
3. $x'' - 2x + 2x = 0$

Exercice 3 (Second ordre)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$,
2. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$, on cherchera une solution particulière sous la forme $P(x)\mathrm{e}^x$ où P polynomiale.
3. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$, on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax\cos(x)\mathrm{e}^x$
4. $y'' + y' + y = \cos x$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$.

Exercice 4 (Conditions aux bords)**.**
Soit ω un réel strictement positif, a et b sont des réels et on pose $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. On cherche à résoudre l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad y(0) = a \qquad y(T) = b$$

1. Résoudre l'équation homogène sans condition.
2. À quelle condition sur a et b l'équation admet elle une solution, cette solution est elle unique ?
3. On change les conditions initiales par $y(0) = a \qquad y(T/2) = b$, quelles sont les solutions ?

Équation autonomes

Exercice 5.
Résoudre

1. $x'(t) = 1 + x^2(t)$ et $x(0) = x_0$
   indication On commencera par diviser par $1 + x^2$ après justification
2. Chercher les solutions à valeurs dans $]-1;1[$ de l'équation $x'(t) = 1 - x^2(t)$ avec $x(0) = x_0$

Exercice 6 ()**.**
Résoudre

1. $x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)} - 1$. avec $x(0) = x_0$
   Poser $z(t) = x(t) + t$,
2. $t.x'(t) = x(t).\Big(1 + \ln\big((x(t)\big) - \ln(t)\Big)$. avec $x(1) = x_1 > 0$
   Poser $z(t) = \ln(x(t)/t)$.

RÉPONSE:

1. Pour t dans l'ensemble de résolution

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t)+1 \\ &= \mathrm{e}^{x(t)}-1+1 \\ &= \mathrm{e}^{z(t)-t} \\ &= \mathrm{e}^{z(t)}\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

Cherchons à résoudre cette dernière équation qui est à variables séparables et qui, comme une exponentielle n'est jamais nulle, est équivalente à .

$$-z'\mathrm{e}^{-z} = -\mathrm{e}^{-t}$$

Qui à pour solution en intégrant des deux côtés de l'égalité

$$\mathrm{e}^{-z(t)} - \mathrm{e}^{-z(0)} = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{0}$$

donc

$$\mathrm{e}^{-z(t)} = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-x_0} - 1$$

cas 1 Si $x_0 < 0$ alors $\mathrm{e}^{-x_0} - 1 > 0$

$$\begin{aligned} z(t) &= -\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-x_0}-1\right) && \text{positivité} \\ &= -\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-x_0}-1\right) \end{aligned}$$

La solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto -\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-x_0}-1\right) - t$$

On vérifie par un calcul que cette fonction est bien solution

cas 2 Si $x_0 > 0$ La solution est

$$t \mapsto -\ln\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-x_0}-1\right) - t$$

et son ensemble de définition est l'ensemble $]-\infty; -\ln(1-\mathrm{e}^{-x_0})[$ où on peut vérifier que $-\ln(-\mathrm{e}^{-x_0}) > 0$

2. Pour que cette équation puisse être mise sous la forme $x' = F(X,t)$ avec une F continue sur un intervalle , il faut que t soit non nulle, au vu de la condition initiale on cherche une solution dans un sous intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ On cherche forcément des solutions à valeurs strictement positives à cause du $\ln$

Après transformation l'équation devient

$$\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{1}{t} = \ln\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

Ce qui donne

$$z'(t) = z(t)$$

donc en résolvant cette équation avec la condition initiale $z(1) = \ln\left(\frac{x_1}{1}\right)$

$$z\ : t \mapsto \ln(x_1)\mathrm{e}^{t-1}$$

Ce qui donne

$$x\ : t \mapsto t\exp\left(\ln(x_1)\mathrm{e}^{t-1}\right)$$

Cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut vérifier qu'elle est solution de l'équation.

❀

Recollement

Exercice 7 (Recollement détaillé)**.**

1. Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D\exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

(b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.
On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Sur quel(s) intervalle(s) connaît-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène ? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (Bonus, non détaillé)**.**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = \sqrt{1+x^2}$,
2. $f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ avec $f(0) = 2$.
3. $xf'(x) - f(x) = \ln(x)$,
4. $xf'(x) - f(x) = x^3$,
5. $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 + 2x^2$,
6. $(1-x^2)f'(x) + xf(x) = 0$,

RÉPONSE:

1. On divise par $(1+x^2)$ ce sui est toujours possible l'équation devient

$$f'(x) - \frac{x}{1+x^2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La méthode du cours permet de résoudre l'équation homogène

$$f_h\ x \mapsto K\sqrt{1+x^2}$$

La méthode de la variation de la constante amène à résoudre

$$\lambda'(x)\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ce qui donne

$$\lambda(x) = \arctan(x) + K$$

Les solutions sont de la forme

$$x \mapsto \arctan(x)\sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2}$$

2. Comme le cosinus ne s'annulle pas sur l'intervalle d'étude, on peut simplifier en

$$f'(x) + \tan(x)f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

En utilisant la méthode du cours et en remarquant que $\tan(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos x}$, les solutions de l'équation homogène sont

$$f_h\ : x \mapsto K\cos x$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

En reconnaissant le dérivée de tangent on obtient

$$\lambda\ : x \mapsto \tan(x) + K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \sin(x) + K\cos(x)$$

3. On étudie cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$, et on peut donc l'écrire sous la forme

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Les solutions homogènes sont

$$x \mapsto Kx$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Une intégration par parties donne

$$\lambda(x) = -\frac{\ln x + 1}{x} + K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto Kx - \ln x - 1$$

4. On réduit l'ensemble d'étude à $\mathbb{R}_+^*$; l'équation devient

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = x^2$$

Nous venons de résoudre l'équation homogène, la variation de la constante donne

$$\lambda'(x)x = x^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto Kx + \frac{x^3}{2}$$

5. On étudie cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation devient

$$f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

Les solutions homogènes sont

$$x \mapsto \frac{K}{x}$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + 2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} + x + \frac{K}{x}$$

6. On va étudier cette équation sur $]-1;1[$, elle devient

$$f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = 0$$

les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto K\sqrt{1-x^2}$$

❀

Pour aller plus loin

Exercice 10 (Changement de fonction inconnue ⛰)**.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
2. Sur $]0;+\infty[$ résoudre $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z(x) = xy(x)$.

RÉPONSE:

Pour x réel,

$$\begin{aligned} z(x) &= (1+e^x)y(x) && \text{c'est toujours possible} \\ z'(x) &= (1+e^x)y'(x) + e^x y(x) \\ z''(x) &= (1+e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x) \end{aligned}$$

$(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+(2\mathrm{e}^x+1)y=(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+\mathrm{e}^x y+(\mathrm{e}^x+1)y=z''+z$ Résolvons

$$z''(x)+z(x)=x\mathrm{e}^x$$

L'équation homogène à pour solution $x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$. Cherchons une solution particulière sous la forme $x\mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ où P est une fonction polynomiale, qui vérifie alors (en simplifiant par e^x)

$$P''+2P'+P+P=x$$

donc P doit être de degré 1 et on trouve $x\mapsto \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^x$, les solutions de l'équation en z sont donc

$$x\mapsto \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^x+A\cos(t)+B\sin(t)$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\left(\frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^x+A\cos(x)+B\sin(x)\right)$$

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose, ce qui cet intervalle est toujours possible

$$z(x)=xy(x)$$

$$z'(x)=xy'(x)+y(x)\qquad z''(x)=xy''(x)+2y'(x)$$

On remarque

$$xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=xy''+2y'+2(xy'+y)+xy$$

L'équation en y devient

$$z''+2z'+z=0$$

Qui admet pour solution

$$x\mapsto A\mathrm{e}^{-x}+Bx\mathrm{e}^{-x}$$

Les solutions de l'équation sont

$$x\mapsto \frac{A}{x}\mathrm{e}^{-x}\cos(x)+B\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$

❀

Exercice 11 (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3.)**.**
Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)}=y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de (E_1). On pose $g=f+f'+f''$. Déterminer une équation différentielle (E_2) du premier ordre vérifiée par g.
2. Résoudre (E_2).
3. Résoudre (E_1).

RÉPONSE:

1. $g'=f'+f''+f^{(3)}$ Comme f est solution de (E_1), $g'=f'+f''+f$, On constate alors que
$$g'=g$$
2. g est de la forme $g(x)=K\mathrm{e}^x$
3. Nous devons donc maintenant résoudre
$$f(x)+f'(x)+f''(x)=K\mathrm{e}^x\qquad (E_3)$$
où K est un paramètre réel Une solution particulière cherché sous la forme $\lambda\mathrm{e}^x$ est
$$f_p x\mapsto \frac{K}{3}\mathrm{e}^x$$
Les solutions de l'équation homogènes sont de la forme
$$x\mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
En changeant les constantes, les solutions de l'équation de départ sont de la forme
$$x\mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C\mathrm{e}^x$$

❀

Exercice 12.
On cherche à déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et qui vérifient le système[1] suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' - y & = & z \\ z' + z & = & 3y \end{array}\right.$$

1. On suppose que y et z sont des solutions de ce système, trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par y.
2. Résoudre cette équation, puis trouver l'expression de z.
3. Compléter ce raisonnement "Analyse-Synthèse" par la partie "synthèse".

RÉPONSE:

1. Si y et z sont solutions alors y' est combinaison linéaire de y et z donc dérivable.

$$\begin{aligned} y'' &= y' + z' && \text{première ligne dérivée} \\ &= y' + 3y - z \text{ deuxième ligne} \\ &= y' + 3y - (y' - y)\text{š} && \text{première ligne} \\ &= 4y \end{aligned}$$

$$y'' - 4y = 0$$

2. $$y(x) = A\exp(2x) + B\exp(-2x)$$

$z = y' - y$

$$z(x) = A\exp(2x) - 3B\exp(-2x)$$

3. Il suffit de vérifier que y et z précédents sont bien solutions

❀

1. Les deux équations doivent être simultanément vérifiées

Exercice 13 (Autre utilisation de la variation de la constante)**.**
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(\mathscr{E}) \qquad x^2y'' - 5xy' + 9y = 4x + 9.$$

1. Chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^r$ et utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver toutes le solutions de l'équation homogène.
2. Trouver les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 14 (Équations fonctionnelles ⛰)**.**
résoudre les équations suivantes

1. $f'(x) + f(x) = 2f(0)$
2. $f(x) + \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$
3. $f'(x) + f(-x) = 0$

RÉPONSE:

1. Posons $K = f(0) + f'(0)$, l'équation devient

$$f' + f = K$$

On sait résoudre cette équation différentielle et on sait f est de la forme

$$f \ : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + K$$

Réciproquement supposons que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C^{-x} + K$ où C et K sont deux constantes réelles
alors $f(0) = C + K$ $f'(0) = -C$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(x) = K = f(0) + f'(0)$$

Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C^{-x} + K$ où C et K sont deux constantes réelles

On trouve une constante de plus que pour une équadiff d'ordre 1

2. **Analyse** Supposons que f soit une solution continue sur un intervalle I (contenant 0) de l'équation fonctionnelle donnée. Alors d'après le théorème fondamentale de l'analyse

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. et

$$\forall x \in I \varphi'(x) = x f(x)$$

On peut donc dériver l'égalité donnée

$$\forall x \in I \qquad f'(x) + x f(x) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle, il existe un réel K tel que

$$f x \mapsto K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Cette fonction étant définie sur $\mathbb{R}$
En réinjectant dans l'équation de départ, pour $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) + \int_0^0 t f(t)\,\mathrm{d}t &= K \\ &= 1 \end{aligned}$$

La seule solution continue possible sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Synthèse Supposons que f soit définie ainsi alors

$$\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - f(x)$$

ce qui permet de conclure

3. **Analyse**
Supposons que f soit solution de cette équation , On suppose f est dérivable sur un intervalle I centré en 0. Comme f' s'exprime à l'aide de f ; f' est dérivable donc f est deux fois dérivable et même de classe $\mathscr{C}^2$ et en dérivant l'équation

$$\forall x \in I \qquad f''(x) - f'(-x) = 0$$

Or $f'(-x) + f(x) = 0$ donc

$$\forall x \in I \qquad f''(x) + f(x) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle usuelle. Il existe deux constantes a et b telles que

$$f x \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$$

fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors pour x réel

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(-t) + b\sin(-t) \\ &= -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(t) - b\sin(t) \end{aligned}$$

En prenant $t = 0$ on obtient $a + b = 0$ **Synthèse** Il est facile de vérifier que les fonctions $t \mapsto a\cos(t) - a\sin(t)$ pour a constante sont bien solution.

❀

Exercice 15.
On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ sur $]-1; +\infty[$:

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - x f(x) = (1+x)^2 \mathrm{e}^x$$

1. Vérifier que la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène associée $(\mathscr{E}_0)$.
   En déduire toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{E}_0)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

RÉPONSE:

On pose pour x réel $f(x)=\mathrm{e}^x$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f''(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x$$

et pour x réel

$$(x+1)f''(x)-f'(x)-xf(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=0$$

Cette fonction est bien solution de l'équation homogène.
Soit f une fonction définie sur $]-1;+\infty[$. on défini λ par

$$\forall x\in]-1;+\infty[\qquad f(x)=\lambda(x)\mathrm{e}^x\qquad \text{où}\qquad \lambda(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$$

ce qui est toujours possible, et λ est dérivable par opérations

$$\forall x\in]-1;+\infty[\qquad f'(x)=\big(\lambda(x)+\lambda'(x)\big)\mathrm{e}^x\qquad f'(x)=\big(\lambda(x)+2\lambda'(x)+\lambda''(x)\big)\mathrm{e}^x$$

Après calculs et simplifications par e^x on trouve que f est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\forall x\in]-1;+\infty[\qquad (x+1)\lambda''(x)+(2x+1)\lambda'(x)=0$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 vérifié par λ', On calcule une primitive de $x\mapsto\dfrac{2x+1}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$ en remarquant que $\dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$

$$\begin{array}{rccl} \lambda' : &]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & K(x+1)\mathrm{e}^{-2x} \end{array}\qquad K \text{ constante}$$

On intègre cette fonction par une intégration par parties

$$\begin{array}{rccl} \lambda : &]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-2x}+G_2 \end{array}\qquad G_1,G_2 \text{ constantes}$$

les solutions de l'équations homogène sont de la forme
$x\mapsto G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-x}+G_2\mathrm{e}^x$

Il suffit de chercher une solution particulière de la forme $P(x)\mathrm{e}^x$ où P est une fonction polynomiale. P vérifie alors

$$(x+1)P''(x)+(2x+1)P'(x)=(x+1)^2$$

On doit donc chercher une fonction polynomiale de degré 2 sous la forme $P(x)=ax^2+bx+c$. Après calcul $P(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x$ convient

Les solutions de l'équation sur $]-1;+\infty[$ sont les fonctions
$x\mapsto G_1(2x+3)\mathrm{e}^{-x}+\left(G_2+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^x$

❀

Exercice 16.
On considère les équations différentielles :

$$y''(x)+2y'(x)+4y(x)=x\mathrm{e}^x. \qquad (\mathscr{E})$$
$$t^2f"(t)+3tf'(t)+4f(t)=t\ln(t) \qquad (\mathscr{F})$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$.
2. Montrer que $(\mathscr{E})$ admet une solution particulière de la forme $x\mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ avec P un polynôme que l'on déterminera. Puis résoudre $(\mathscr{E})$.
3. Si $t\mapsto f(t)$ est une solution de $(\mathscr{F})$, quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $x\mapsto f\big(\mathrm{e}^x\big)$? En déduire les solutions de $(\mathscr{F})$.

RÉPONSE:

Résultat du cours, il existe deux constantes A et B telles que

$$\begin{array}{rccl} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & A\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x)+B\mathrm{e}^{-t}\sin(\sqrt{3}x) \end{array}$$

$x\mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si

$$P+2P'+P''+2(P+P')+4P=x$$

Donc P est de degré 1 et on trouve

$$P(x)=\frac{1}{7}x-\frac{4}{49}$$

les solutions de $\mathscr{E}$ sont $x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + B\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$

$g\ : x \mapsto f(\exp(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x\right) \qquad g''(x) = \mathrm{e}^{2x} f''\left(\mathrm{e}^x\right) + \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)$$

$$t^2 f"(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

Peut s'écrire

$$t^2 f"(t) + tf'(t) + 2tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

et en posant $t = \exp(x)$

$$\mathrm{e}^{2x} f"(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x) + 2\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x) + 4f(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x x$$

On constate que g vérifie la première équation

$$\forall x \in \mathbb{R} f(\mathrm{e}^x) = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)\mathrm{e}^t + A\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + B\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$$

Avec $x = \ln(t)$

les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \left(\frac{1}{7}\ln(t) - \frac{4}{49}\right)t + \frac{A}{t}\cos(\sqrt{3}\ln(t)) + \frac{B}{t}\sin(\sqrt{3}\ln(t))$$

❀

Exercice 17 (Forme théorique des solutions)**.**
On s'intéresse à l'équation différentielle autonome

$$y' = F(y)$$

où F est une fonction continue, ne s'annulant pas sur un intervalle I

1. Montrer qu'il existe une fonction G une primitive de $\frac{1}{F}$ sur I
2. Démontrer que G induit une bijection de I vers un intervalle J que l'on ne cherchera pas à calculer
3. Soit λ un réel fixé, on pose

$$y : t \mapsto G^{-1}(t+\lambda)$$

   Montrer que y est solution de l'équation différentielle.
4. Essayez de démontrer la réciproque.

ce résultat n'est pas un résultat que l'on utilise en pratique pour résoudre des équations différentielles

<u>RÉPONSE:</u>

1. Comme F ne s'annulle pas et est continue, $1/F$ est aussi une fonction continue sur un intervalle donc elle admet des primitives.
2. G à pour dérivée $1/F$, cette dernière fonction ne change pas de signe et est continue sur un intervalle , donc en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et un raisonnement par l'absurde on montre que G' est de signe constant, donc G est strictement monotone, continue sur un intervalle et on peut donc appliquer le théorème de la bijection monotone.
3. Le théorème de la dérivée de la bijection réciproque s'applique, car G' ne s'annulle pas

$$\forall t \in J \qquad (G^{-1})'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(t))} = F(G^{-1}(t))$$

   donc y a pour dérivée

$$y'(t) = 1F(y(t))$$

   Ce qui démontre que y est solution (sur l'intervalle $J - \lambda$)
4. Si y est solution sur un intervalle J à valeur dans I

$$y' = F(y)$$

   Comme F ne s'annulle pas, $F(y)$ ne s'annulle pas sur J

$$\frac{y'}{F(y)} = 1$$

En intégrant des deux côtés de l'égalité, et en reprenant les notations précédente, il existe une constante λ telle que

$$G(y) = t + \lambda \qquad t \in J - \lambda$$

et comme G est bijective on retrouve le résultat précédent

❀