DL mathématiques n°03
Pour le lundi 07 octobre 2024

Exercice

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0;1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0;1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Facultatif : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = \frac{2}{2n+1}f(0) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.$$

2. En utilisant un théorème de première année sur les fonctions continues sur un segment, montrer que :

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

Pensez aux complexes

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.