DL mathématiques n°01
Réponses

1. (a) Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $1-\mathrm{e}^{-x}\neq 0$ donc
$$(H)\Leftrightarrow y'+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}y=0.$$
On pose, pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $a(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$.
La fonction a est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur cet intervalle une primitive de a est la fonction A définie par $A(x)=\ln(|\mathrm{e}^x-1|)$.
Ainsi, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathscr{S}_H=\left\{x\mapsto\dfrac{C}{\mathrm{e}^x-1}\,/\,C\in\mathbb{R}\right\}$.

   (b) Sur $\mathbb{R}^{+*}$, utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de (E).
On cherche y_p sous la forme $y_p(x)=\dfrac{u(x)}{\mathrm{e}^x-1}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a alors
$$y_p'(x)=\frac{u'(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{u(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}.$$
Donc y_p est solution de (E), si, et seulement si :
$$\frac{u'(x)}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\Leftrightarrow u'(x)=1.$$
$x\mapsto\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ est donc une solution particulière de (E).
Ainsi, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathscr{S}_E=\left\{x\mapsto\dfrac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}\,/\,C\in\mathbb{R}\right\}$.

2. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la résolution se déroule de la même manière, la différence est juste que $|\mathrm{e}^x-1|=1-\mathrm{e}^x$.
Donc, sur $\mathbb{R}^{-*}$, $\mathscr{S}_H=\left\{x\mapsto\dfrac{D}{1-\mathrm{e}^x}\,/\,D\in\mathbb{R}\right\}$ et $x\mapsto\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ est aussi une solution particulière de (E).
Donc, sur $\mathbb{R}^{-*}$, $\mathscr{S}_E=\left\{x\mapsto\dfrac{D-x}{1-\mathrm{e}^x}\,/\,D\in\mathbb{R}\right\}$.

3. (a) Dans toute cette question, on suppose que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   i. D'après les questions 1. et 2., il existe C et D deux constantes réelles telles que :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C+x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x>0\\ \dfrac{D-x}{1-\mathrm{e}^x} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

   ii. Comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=1$.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{C}{\mathrm{e}^x-1}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si } C\neq0\\ 0 & \text{si } C=0.\end{cases}$
De même, $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{D}{1-\mathrm{e}^x}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si } D\neq0\\ 0 & \text{si } D=0.\end{cases}$
On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\begin{cases}\pm\infty & \text{si } C\neq0\\ 1 & \text{si } C=0,\end{cases}$ et
$\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=\begin{cases}\pm\infty & \text{si } D\neq0\\ 1 & \text{si } D=0.\end{cases}$
La fonction f devant être continue sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en 0, cela nous impose que $C=D=0$.
En conclusion, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x\neq0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$

   iii. On a, pour $x\in\mathbb{R}^*$:
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x-1)}.$$
Or $x-\mathrm{e}^x+1=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.
Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x\times x}=-\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$.
f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

   (b) On a vu que la fonction f est dérivable en 0 et de plus elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et
$$(1-\mathrm{e}^{-0})f'(0)+f(0)=0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=1=\mathrm{e}^{-0},$$
donc l'équation est bien vérifiée en 0.
f est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.