DL mathématiques n°02
Pour le lundi 30 septembre 2024

On considère l'équation différentielle :

$$(1-\mathrm{e}^{-x})y' + y = \mathrm{e}^{-x}. \qquad (E)$$

1. **Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$:**
   (a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle : $(1-\mathrm{e}^{-x})y' + y = 0. \qquad (H)$
   (b) À l'aide de la méthode de variation de la constante, rechercher sur $\mathbb{R}^{+*}$ une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. **Résolution sur $\mathbb{R}^{-*}$:**
   Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. **Recherche d'une solution sur $\mathbb{R}$**
   Dans cette question on cherche à savoir s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-\mathrm{e}^{-x})f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Supposons qu'une telle fonction f existe.
      i. Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$ puis pour $x \in]-\infty;0[$.
      ii. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer les limites en 0^+ et en 0^- de f (*on sera amener à discuter selon les valeurs de certains paramètres*) et en déduire alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$, $x \in]-\infty;0[$ et $x = 0$.
      iii. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, calculer $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Que peut-on en déduire?
   (b) Réciproquement, vérifier que la fonction f trouvée dans la question précédente satisfait bien au problème donné.