DL mathématiques n°03
Réponses

Exercice

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0;1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0;1[$.

RÉPONSE:

Posons pour n entioer naturel

$$\mathscr{H}_n \ : u_n \in]0;1[$$

Initialisation Par définition $u_0 \in]0;1[$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 1$, alors

$$0 < 1 - u_n < 1$$

En multipliant ces inégalités, à termes positifs

$$0 < u_n(1 - u_n) < u_n < 1$$

Donc

$$0 < u_n - u_n^2 < 1$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ on a } u_n \in]0;1[.}$$

❀

2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente

$$0 < u_n \qquad 0 < 1 - u_n < 1$$

donc

$$0 < u_n(1 - u_n) < u_n$$

C'est à dire

$$0 < u_{n+1} < u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$$

La suite est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ, telle que $\ell \geqslant 0$, la suite (u_{n+1}) à la même limite. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient

$$\ell = \ell - \ell^2$$

ce qui donne $\ell = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

❀

3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) && \text{relation qui définie la suite} \\ &= u_0 - u_{n+1} && \text{télescopage} \end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 - 0$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0}$$

❀

4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

RÉPONSE:

Remarque : La première question permet de démontrer que le quotient et le logarithme sont définis. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) && \text{propriétés du ln} \\ &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) && \text{télescopage} \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

donc par composition de limite

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\infty$$

$$\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ est divergente.}}$$

❀

5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &\ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) && \text{définiton de la suite} \\ &= \ln(1-u_n) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n && \text{car } \ln(1+u) \sim_0 u \qquad \lim_{+\infty} u_n = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n}$$

La série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente et son terme général est de signe constant. donc d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs et en utilisant l'équivalent précédent, $\sum(-u_n)$ est une série divergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

❀

Facultatif

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = \frac{2}{2n+1}f(0) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.$$

RÉPONSE:

On effectue une intégration par parties en intégrant $t \mapsto \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$ et en dérivant $x \mapsto f(x)$ ces fonctions étant de classe $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt &= \left[-\frac{2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)f(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t)\frac{2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)f(\pi) + \frac{2}{(2n+1)}\cos(0)f(0) + \int_0^\pi f'(t)\frac{2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= 0 + \frac{2}{(2n+1)}f(0) + \int_0^\pi f'(t)\frac{2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = \frac{2}{2n+1}f(0) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.}$$

❀

2. En utilisant un théorème de première année sur les fonctions continues sur un segment.

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

RÉPONSE:

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, f' est une fonction continue sur un segment elle est donc bornée (et atteint ses bornes),, il existe M un réel tel que

$$\forall t \in [0;\pi] \qquad \left|f'(t)\right| \leqslant M$$

Donc en utilisant la croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} \left|f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)\right| dt \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} M\times 1\,\mathrm{d}t$$

donc

$$0 \leqslant \left|\frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt\right| \leqslant \frac{2\pi M}{2n+1}$$

En utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt = 0$$

et par opérations

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = 0}$$

❀

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

RÉPONSE:

Soit $t \in]0;\pi]$ et n entier naturel non nul

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikt}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{it}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{it}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{it}}\right) && \text{car la raison n'est pas égale à 1 car } t \in]0;\pi] \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{1-\mathrm{e}^{nit}}{1-\mathrm{e}^{it}}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{\mathrm{e}^{\frac{int}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{int}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-int}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{it}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{it}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-it}{2}}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)t}{2}}\frac{2i\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\left(\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)t}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{(n+1)t}{2}}\right)\left(\mathrm{e}^{i\frac{nt}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{nt}{2}}\right)}{4i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{formule Euler} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{i\frac{(2n+1)t}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{()2n+1)t}{2}}}{4i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } t \in]0,\pi], \text{ on a } A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.}$$

❀

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

RÉPONSE:

Les intégrations par parties sont bien justifiées toutes les fonctions étant de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt &= \left[-\frac{at^2+bt}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{2at+b}{n}\sin(nt)\,dt && \text{IPP}\\
&= 0-0+\int_0^\pi \frac{2at+b}{n}\sin(nt)\,dt\\
&= \left[\frac{2at+b}{n^2}\cos(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2a}{n^2}\cos(nt)\,dt && \text{IPP}\\
&= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n-b}{n^2}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre

$$\boxed{a = \frac{1}{2\pi} \text{ et } b = -1}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) &= \int_0^\pi (at^2+bt)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(kt)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{at^2+bt}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n \left[\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(kt)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2\pi}t^2-t}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} && \text{point précedent} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi + S_n \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}\right] + S_n \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\pi^3}{6\pi}\right] + S_n
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)\,\mathrm{d}t = S_n - \frac{\pi^2}{6}}
$$

❀

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.

<u>RÉPONSE:</u>

Pour tout $t \in]0;\pi]$

$$
(at^2+bt)A_n(t) = \frac{at^2+bt}{2\sin(t/2))}\sin((2n+1)t/2)
$$

En posant pour $t \in]0;\pi]$, $f(t) = \dfrac{at^2+bt}{2\sin(t/2))}$ et $f(0) = -1$ on constate que

$$
\forall t \in [0;\pi] \qquad (at^2+bt)A_n(t) = f(t)\sin((2n+1)t/2)
$$

De plus comme

$$
\frac{at^2+bt}{2\sin(t/2))} \sim_{t\to 0} \frac{bt}{t}
$$

$$
\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{at^2+bt}{2\sin(t/2))} = -1
$$

La fonction f est donc continue en 0.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;\pi]$ et

$$\forall t \in]0;\pi] \qquad f'(t) = \frac{(2at+b)2\sin(t/2) - \cos(t/2)(at^2+bt)}{4(\sin(t/2))^2}$$

donc en effectuant un dl

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2at+b)\left(t+o(t^2)\right) - \left(1 - \dfrac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\text{ů}(at^2+bt)}{4(\sin(t/2))^2} \\ &= \frac{at^2+o(t^2)}{4(\sin(t/2))^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0//t>0} f'(t) = a$$

Et pour $t \in]0;\pi]$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{at^2+bt+2\sin(t/2)}{2t\sin(t/2)} = \frac{at^2-t+t+o(t^2)}{2\sin(t/2)} \sim_0 \frac{at^2}{t^2}$$

qui à pour limite a quand t tend vers 0. f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = a$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$

On peut donc appliquer le résultat de la première question

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{\pi^2}{6}\right) = 0}$$

❀