

DL mathématiques n°04
Pour le lundi 14 octobre 2024

Extrait d'une planche d'oral Agro-véto

1. On considère la fonction f définie sur $[0;9]$ par :

$$\forall x \in [0;9], \quad f(x) = \frac{10x(x-1)}{90-x^2+x}.$$

Écrire une fonction Python f qui prend en entrée une liste L de réels de $[0;9]$ et qui renvoie la liste des images par f de ces réels.

On dispose de deux urnes. L'urne U_1 contient 10 tickets dont x ($x \in \llbracket 2;9 \rrbracket$) portent la lettre « G ». L'urne U_2 contient 10 tickets dont y ($y \in \llbracket 1;10 \rrbracket$) portent la lettre « G ».

Le jeu se déroule de la manière suivante :

- Au premier tour Eric pioche simultanément deux tickets dans l'urne U_1 . S'il tire deux tickets « G », il gagne et le jeu s'arrête.
- Si Eric perd au premier tour, c'est au tour d'Otis. Il tire un ticket dans l'urne U_2 . S'il tire un « G », il gagne et le jeu s'arrête. Sinon c'est au tour d'Eric.
- Après chaque tour les tickets sont remis dans les urnes.

On introduit les événements suivant (k désigne un entier naturel non nul) :

- A_k : « le k -ième tirage d'Eric a lieu et Eric obtient deux tickets G »;
- B_k : « le k -ième tirage d'Otis a lieu et Otis obtient un ticket G »;
- E_k : « Eric gagne à son k -ième tirage »;
- O_k : « Otis gagne à son k -ième tirage »;
- E : « Eric gagne la partie »
- O : « Otis gagne la partie »

2. Déterminer la probabilité p qu'Eric gagne à son premier tour et la probabilité p' qu'Otis gagne à son premier tour sachant qu'Eric ne vient pas de gagner.

3. (a) Exprimer l'événement E_k à l'aide de certains des événements A_i et B_j .
En déduire la valeur de $P(E_k)$.

(b) Exprimer l'événement E à l'aide des événements E_k .

Montrer alors que $P(E) = \frac{p}{1-qq'}$ où $q = 1 - p$ et $q' = 1 - p'$.

(c) Montrer que $P(O) = \frac{p'q}{1-qq'}$.

4. Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si, $y = f(x)$.

5. Utiliser la fonction Python de la question 1. pour déterminer le ou les couple(s) (x, y) tels que le jeu soit équitable.