Équations différentielles.

BCPST Spé 2

Lycée Champollion Grenoble

Septembre 2023

Table des matières

I Rappels de première année : équations différentielles linéaires

En BCPST 1 vous avez étudié les équations du type :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{E1}$$

où a et f désigne des fonctions continues sur un intervalle, à valeurs réelles. Et les équations de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \tag{E2}$$

où a, b, c constantes réelles et a non nulle.

Dans les deux cas $f(t)$ est **le second membre** et l'équation où le second membre est nul est **l'équation homogène associée**

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{H1}$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H2}$$

I.1 Résultats généraux

Proposition 1 (Linéarité de l'équation homogène associée)**.**

- *Si f et g sont solutions de* (H1) *sur un même intervalle I et λ et μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est solution de* (H1) *sur I.*
- *Si f et g sont solutions de* (H2) *et λ et μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est solution de* (H1).

Théorème 1 (Décomposition des solutions)**.**

- *Si y_P est une solution de* (E1) *(dite **solution particulière**) alors les solutions de* (E1) *sont exactement les fonctions $y_P + y_H$ où y_H parcourt l'ensemble des solutions de* (H1).
- *Si y_P est une solution de* (E2) *(dite **solution particulière**) alors les solutions de* (E2) *sont exactement les fonctions $y_P + y_H$ où y_H parcourt l'ensemble des solutions de* (H2).

Démonstration :

I.2 Résolution

Si dans le cas général on ne sait pas résoudre de façon exacte une équation différentielle, on connaît des méthodes pour résoudre certaines équations.

I.2.a Résolution Ordre 1

Proposition 2 (Résolution de l'équation (H1))**.**

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{H1}$$

Soit A une primitive de a. Alors (H1) admet pour solutions sur I les fonctions $t \mapsto KE^{-A(t)}$ où K est une constante réelle.

Démonstration :

Remarque : L'unique solution de (H1) qui s'annulle en un point est la solution constante nulle

Méthodes pour trouver des solutions particulières

Seul le cas où a et f sont constantes peut vous être demandé sans indication. Dans les autres cas l'énoncé devrait vous donner la " forme " de la solution particulière à chercher ou indiquer la méthode à utiliser.

Proposition 3 (Variation de la constante)**.**
Soit y_{H_0} une solution non nulle de (H1), les solutions de (E1) sont de la forme $y : t \mapsto K(t)Y_{H_0}$ avec K une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I \qquad K'(t) = \frac{f(t)}{y_{H_0}(t)}$$

Démonstration :

Remarque : Comme une exponentielle est toujours non nulle, $K(t) = \dfrac{y(t)}{e^{-A(t)}}$ et on peut toujours chercher les solutions avec cette méthode.

Attention : Cette démonstration est valable pour toutes les équations de ce type, mais en pratique l'étape d'intégration peut se révéler longue, voir impraticable. Le résultat théorique n'est pas à connaître seule l'application est à maîtriser.

I.2.b Résolution Ordre 2

Méthode pour résoudre une équation linéaire d'ordre deux à coefficients constant

Pour résoudre l'équation :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H2}$$

On étudie l'équation caractéristique :

$$aX^2 + bX + c = 0 \tag{C}$$

Cette équation polynomiale de degré deux (car a est non nul) à coefficients réels, trois cas se présentent

Cas 1 (C) admet deux solutions réelles λ_1 et λ_2, qui sont forcément différentes. Dans ce cas là les solutions de (H1) sont exactement les fonctions $t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$ où K_1, K_2 sont des constantes réelles.

Cas 2 (C) admet une unique solution réelle λ_0. Dans ce cas là les solutions de (H1) sont exactement les fonctions $t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$ où K_1, K_2 sont des constantes réelles.

Cas 3 (C) admet deux solutions complexes λ_1 et λ_2, qui sont forcément conjuguées, on peut alors écrire ces deux solutions sous la forme $a \pm ib$. Dans ce cas là les solutions de (H1) sont exactement les fonctions $t \mapsto K_1 e^{at} \cos(bt) + K_2 e^{at} \sin(bt)$ où K_1, K_2 sont des constantes réelles.

Dans ce cas on peut aussi écrire les solutions sous la forme $t \mapsto K e^{(a+ib)t} + \overline{K} e^{(a-ib)t}$ où K est une constante réelle.

Solution particulière pour une équation de type (E2)

On doit vous guider sauf pour le cas d'un second membre constant.

I.3 Unicité de la solution maximale/conditions initiales adaptées

Jusqu'à présent nous n'avons pas introduit de condition(s) initiale(s) et nous n'avions pas évoqué l'éventuelle unicité de la solution.

Théorème 2 (Équation linéaire du premier ordre avec condition initiale)**.**

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{C1}$$

avec $t_0 \in I$ et y_0 un réel admet une unique solution

Démonstration :

Méthode

On commence par résoudre l'équation sans condition initiale avec les méthodes vues précédemment, puis on détermine la constante en utilisant la condition initiale.

Théorème 3 (Équation linéaire du second ordre à coefficients constants avec condition initiale)**.**

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad y(t0) = y_0, y'(t_0) = v_0 \tag{C2}$$

avec $t_0 \in I$, y_0 et v_0 deux réels admet une unique solution.

Démonstration :

Méthode

On commence par résoudre l'équation sans condition initiale avec les méthodes vues précédemment, puis on détermine les deux constantes en utilisant les conditions initiales.

II Équations autonomes

II.1 Introduction : écriture général d'une équation linéaire

Une équation différentielle, du premier ordre d'inconnue y, où y est une fonction d'une variable réelle peut s'écrire sous la forme

$$y' = F(t, y)$$

où F est une fonction continue.

Exemple : l'équation (E1) peut s'écrire sous la forme

$$y' = F(t, y) \qquad F : (t, u) \mapsto -a(t)u + f(t)$$

Exercice : Écrire sous cette forme l'équation

$$y'(t) = ty^2(t) + t^2$$

Définition 1 (Solution et solution maximale)**.**

- *y une fonction dérivable sur un intervalle I est* ***solution de l'équation*** *si et seulement si pour tout réel $t \in I$ $y'(t) = F(t, y(t))$*
- *Si y est une solution d'une équation différentielle, et que y est définie sur un intervalle I, alors pour tout intervalle $J \subset I$ la restriction y_J est aussi solution de l'équation.*
- *Si il n'existe pas d'intervalle K (plus grand que I) et de fonction $\tilde{y}$ tels que $\tilde{y} \restriction_I = y$, $I \subset K$ et $\tilde{y}$ est solution de l'équation on dit alors que y est une* ***solution maximale****. C'est ce type de solution que l'on cherche à trouver.*

II.2 Au programme

Définition 2 (Équation différentielle autonome[1])**.**
Une équation qui ne dépend pas du temps est dite ***autonome****, elle peut être mise sous la forme*

$$y' = F(y) \tag{A}$$

où F est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple :

- $y'(t) = Ky(t)$ est une équation autonome.
- $y'(t) = Ky(t) + \mathrm{e}^{-t}$ n'est pas une équation autonome.
- $y'(t) = Ky(t)(1 - y(t))$ est une équation autonome.
- $y'(t) = t^2 y(t)$ n'est pas une équation autonome

Proposition 4 (Indépendance par décalage)**.**

Si y est solution de l'équation (A) *sur l'intervalle $I =]a; b[$ et Δ est un réel, alors $t \mapsto y(t+\Delta)$ est solution de l'équation sur l'intervalle* .

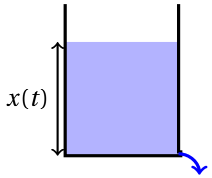
Démonstration :

III Exemple : vidange d'un récipient

$$x'(t) = -K\sqrt{x(t)} \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0 \tag{E.1}$$

où x_0 est un réel positif, et K une constante positive.

Interprétation physique Cette équation décrit la vidange d'un récipient. La fonction $x(t)$ représente la hauteur de liquide présente dans le récipient à l'instant t.



Remarques préliminaires Nous recherchons les solutions qui sont toujours positives.
D'après l'équation, si x est solution, alors x' est négative donc toute solution est décroissante sur son intervalle de définition.
Cela implique que si à un temps t_1, on a $x(t_1) = 0$ alors pour tout t plus grand que t_1 et dans l'intervalle de définition on a $x(t) = 0$. Une fois vide le récipient reste vide !

Résolution Posons J l'intervalle maximal tel que

$$\forall t \in J \qquad x(t) > 0$$

1. extrait du programme « Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée »

Nous constatons que $t_0 \in J$. Alors

$$\forall t \in J \qquad \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = -K$$

donc, en intégrant, pour $t \in J$

$$\int_{t_0}^{t} 2\sqrt{x}'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{t_0}^{t} -K\,\mathrm{d}\lambda$$

ce qui nous donne

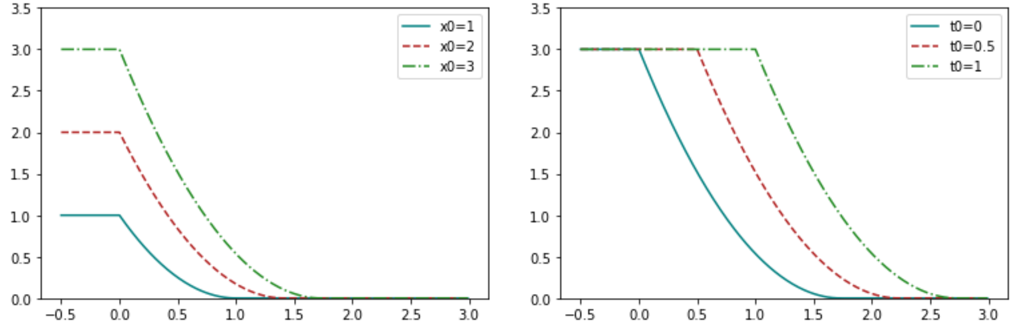
$$\forall t \in J \qquad x(t) = \left[\sqrt{x_0} - K\frac{t-t_0}{2}\right]^2$$

Le moment où le récipient se vide est

$$t_v = t_0 + 2\frac{\sqrt{x_0}}{K}$$

qui est plus grand que t_0.

Étude graphique



Variations du volume initial, puis de l'instant d'ouverture.

Attention : Les solutions sont continues, mais non dérivables en t_0 et t_v les fonctions avant t_0 ne sont pas solution de l'équation.

IV Exemples au programme : dynamique des populations

On cherche à modéliser l'évolution d'une population. On note t le temps et $y(t)$ la population au temps t. On modélise l'évolution de la population avec une équation différentielle du type

$$y' = F(y)$$

où y' est la variation : l'augmentation ou diminution, instantanée de la population. L'instant initial à lieu en $t_0 = 0$, pour une population de taille y_0.

Les modèles suivants sont simplifiés, et modernisées dans leur présentation, par rapport aux modèles originaux. Les programmes python utilisés pour les graphiques sont disponibles.

IV.1 Modèle de Malthus

Thomas Malthus (1766–1834) propose de noter $n(y)$ le nombre de naissances lorsque la population est de $y(t)$ et $m(y)$ le nombre de décès.

Il obtient donc un premier modèle :

$$y' = n(y) - m(y) \tag{B}$$

et si on écrit la variable t

$$y'(t) = n(y(t)) - m(y(t))$$

Puis il propose que le **taux de mortalité**[2] et le **taux de natalité** soient constants : il existe deux constantes α et β, positives telles que

$$n(y) = \alpha y \qquad m(y) = \beta y$$

L'équation (B) devient :

$$y'(t) = Ky(t) \qquad K = \alpha - \beta \tag{M}$$

Attention : On admet que ce modèle est cohérent dans le sens où si $y(0) > 0$ alors y est toujours strictement positif.

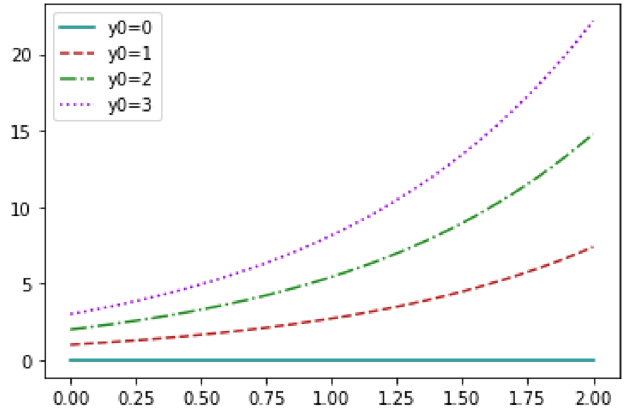
Questions 1 (premiers résultats)**.**

1. À quelle condition portant sur le taux de natalité et de mortalité a-t'on $K > 0$. Sans résoudre l'équation montrer que dans ce cas là la fonction y est croissante. Est ce naturel ?
2. Étudier le cas $K < 0$

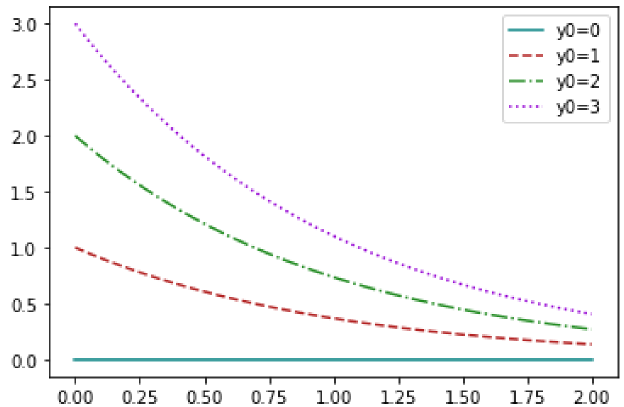
Questions 2.
Résoudre l'équation (M).

K fixé, variation de la condition initiale
On fixe dans un premier temps $K = 1$, et on trace e sur un même graphe les solutions pour y_0 prenant successivement les valeurs 0, 1, 2 et 3.

2. proportion de population mourant à un instant donné

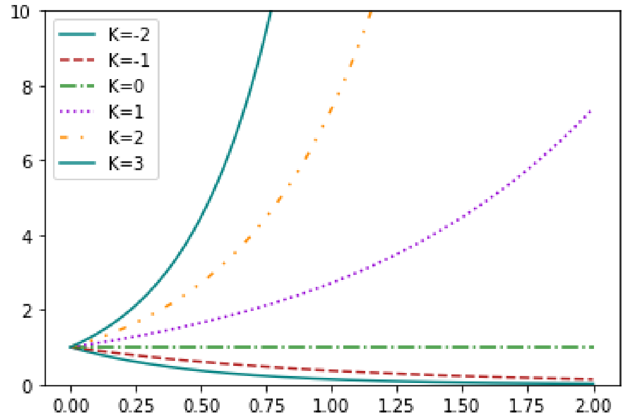


On recommence avec $K = -1$.



On fixe $y(0)$, variation de K

On fixe la population initiale à $y(0) = 1$, et on trace sur un même graphe les solutions quand la constante K varie dans $\{-2, -1, \ldots, 1, 2, 3\}$.



Questions 3 (Conclusion)**.**
Quelle est la conclusion de Malthus ?

IV.2 Modèle de Verhulst/ modèle logistique

Comme le modèle de Malthus conclue à une explosion exponentielle et sans limite des populations ce qui n'est pas constatée en pratique, Pierre-François Verhulst (1804–1849) propose d'améliorer le modèle précédent. Il utilise le même modèle de base ((M)).

$$y' = n(y) - m(y)$$

Mais il propose que le **taux** de natalité et de mortalité dépendent de la population

$$\tau_n(y) = ay + b \qquad \tau_m(y) = a'y + b'$$

avec $a < 0$, $a' > 0$

Questions 4.
Que signifie le choix de $a < 0$, $a' > 0$?. Que valent $n(y)$ et $m(y)$?

Questions 5 (Simplification)**.**
Trouver deux constantes r et K telles que l'équation ((M)) devienne

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \qquad y(0) = y_0 \tag{V}$$

On exprimera K et r en fonction de a a', b et b'.

On admet que les constantes K et r sont positives, r est appelée *taux de croissance maximum* et K *capacité de charge.*

Questions 6 (solution constante)**.**
Montrer que la fonction constante égale à K est solution.

Questions 7 (Étude qualitative)**.**
On suppose qu'a un instant t_0 $y(t_0) > K$. Que peut on dire du signe de $y'(t_0)$? Que peut on en déduire? Même question dans le cas $0 < y(t_0) < K$

Questions 8 (simplification)**.**
Montrer que si on pose $x = \dfrac{y}{K}$, l'équation précédente devient :

$$x' = r\,x\,(1-x) \qquad x(0) = x_0 \tag{V'}$$

Questions 9 (Résolution)**.**
On ne cherche que les solutions de (V') qui sont définie sur $\mathbb{R}$, strictement positives et qui ne prennent jamais la valeur 1. On suppose que la fonction $t \mapsto x(t)$ est une telle solution.

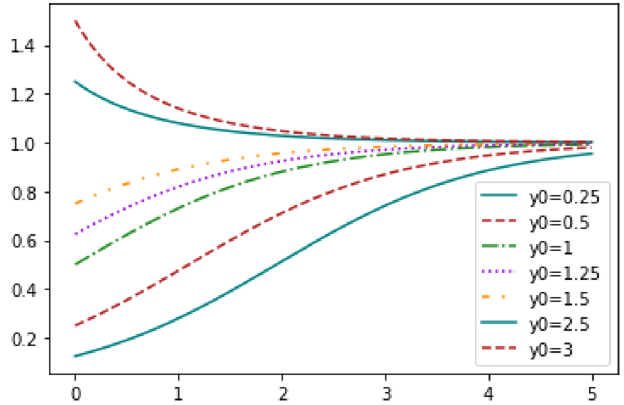
On pose $u = \dfrac{x}{1-x}$.

Attention : la variable est t, pour faire les calculs suivants vous pouvez écrire $u(t) = \dfrac{x(t)}{1-x(t)}$.

1. Montrer que u vérifie l'équation $u' = r\,u$.
2. Résoudre l'équation précédente.
3. En déduire que $x(t) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}$
4. En déduire que $y(t) = \dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}$

Questions 10 (Limite)**.**
Quelle est la limite de la solution quand t tend vers $+\infty$? Que peut on en conclure pour K ?

On fixe K**,** r**, variation de** $y(0)$ On fixe $K = 2$ et $r = 1$ et on trace sur un même graphique les solutions pour y_0 parcourant $\{0,25;\ 0.5\ldots 1,25;\ 1,5, 2.5, 3\}$.



Questions 11 (Conclusion)**.**
Quelle est la conclusion de Verhulst ?

V Exemple de recollement

Certaines équations très proches de la catégorie précédente demande un plus de travail. Traitons par exemple le problème suivant

$$t x'(t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad x(1) = 2 \tag{E.1}$$

Ce que est demandé quand $t = 0$ peut paraître ambigu. Nous précisons donc que nous recherchons les fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient cette équation. Nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad x'(t) = \frac{1}{t} x(t) \qquad \text{et} \qquad x(1) = 2 \tag{E.2}$$

En utilisant la méthode précédente, nous calculons que les solutions à cette « sous-équation » sont exactement les applications

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & Kt \end{array}$$

où K est une constante réelle. Comme $x(1) = 2$ on a $K = 2$.
De même il, on résout

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^* \qquad x'(t) = \frac{1}{t} x(t) \tag{E.3}$$

Il existe une constante G telle que

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & Gt \end{array}$$

Nous remarquons que l'on peut prolonger par continuité nos solutions en 0 en posant $x(0) = 0$, mais en étudiant la dérivée à droite et à gaucje en zéro, il faut pour que la solution soit dérivable en 0 que $G = 2$. L'unique solution est donc

$$x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2t \end{array}$$