

DL mathématiques n°04  
Pour le lundi 14 octobre 2024

**Extrait d'une planche d'oral Agro-véto**

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0;9]$  par :

$$\forall x \in [0;9], \quad f(x) = \frac{10x(x-1)}{90-x^2+x}.$$

Écrire une fonction Python  $f$  qui prend en entrée une liste  $L$  de réels de  $[0;9]$  et qui renvoie la liste des images par  $f$  de ces réels.

On dispose de deux urnes. L'urne  $U_1$  contient 10 tickets dont  $x$  ( $x \in \llbracket 2;9 \rrbracket$ ) portent la lettre «  $G$  ». L'urne  $U_2$  contient 10 tickets dont  $y$  ( $y \in \llbracket 1;10 \rrbracket$ ) portent la lettre «  $G$  ».

Le jeu se déroule de la manière suivante :

- Au premier tour Eric pioche simultanément deux tickets dans l'urne  $U_1$ . S'il tire deux tickets «  $G$  », il gagne et le jeu s'arrête.
- Si Eric perd au premier tour, c'est au tour d'Otis. Il tire un ticket dans l'urne  $U_2$ . S'il tire un «  $G$  », il gagne et le jeu s'arrête. Sinon c'est au tour d'Eric.
- Après chaque tour les tickets sont remis dans les urnes.

On introduit les événements suivant ( $k$  désigne un entier naturel non nul) :

- $A_k$  : « le  $k$ -ième tirage d'Eric a lieu et Eric obtient deux tickets  $G$  »;
- $B_k$  : « le  $k$ -ième tirage d'Otis a lieu et Otis obtient un ticket  $G$  »;
- $E_k$  : « Eric gagne à son  $k$ -ième tirage »;
- $O_k$  : « Otis gagne à son  $k$ -ième tirage »;
- $E$  : « Eric gagne la partie »
- $O$  : « Otis gagne la partie »

2. Déterminer la probabilité  $p$  qu'Eric gagne à son premier tour et la probabilité  $p'$  qu'Otis gagne à son premier tour sachant qu'Eric ne vient pas de gagner.

3. (a) Exprimer l'événement  $E_k$  à l'aide de certains des événements  $A_i$  et  $B_j$ .  
En déduire la valeur de  $P(E_k)$ .

(b) Exprimer l'événement  $E$  à l'aide des événements  $E_k$ .

Montrer alors que  $P(E) = \frac{p}{1-qq'}$  où  $q = 1 - p$  et  $q' = 1 - p'$ .

(c) Montrer que  $P(O) = \frac{p'q}{1-qq'}$ .

4. Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si,  $y = f(x)$ .

5. Utiliser la fonction Python de la question 1. pour déterminer le ou les couple(s)  $(x, y)$  tels que le jeu soit équitable.