

## RÉVISIONS : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

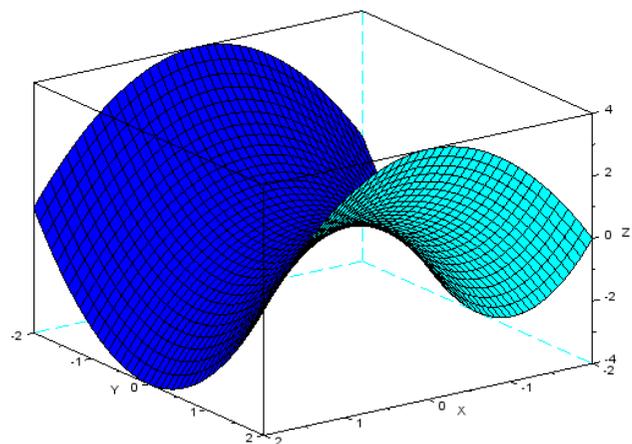
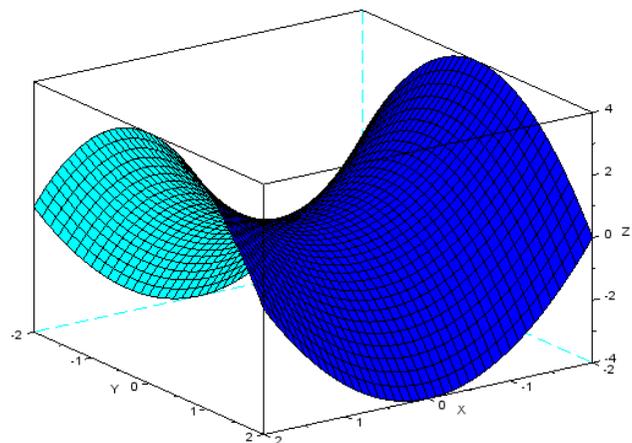
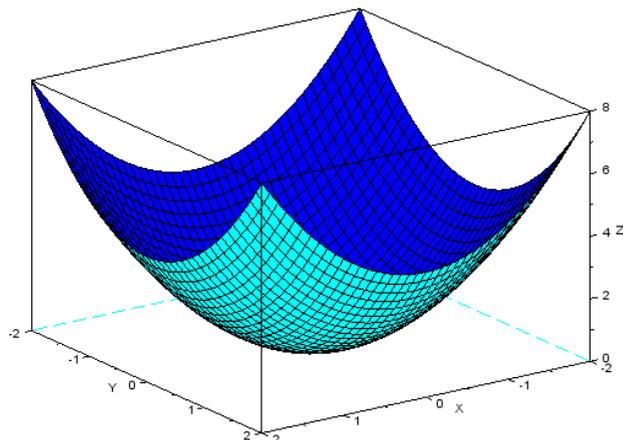
### Préliminaires

#### Exercice 1.

Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto -x^2 + y^2$$

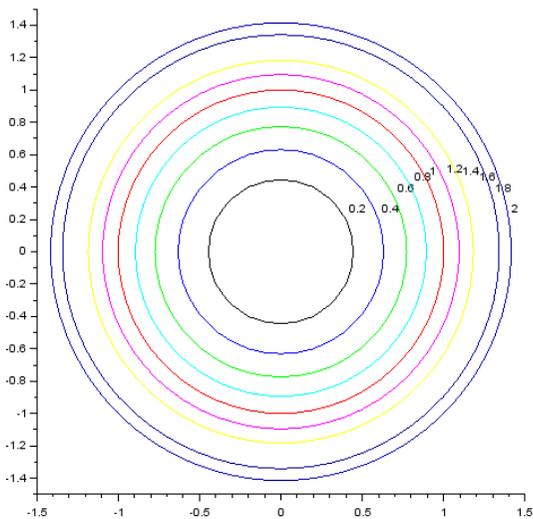
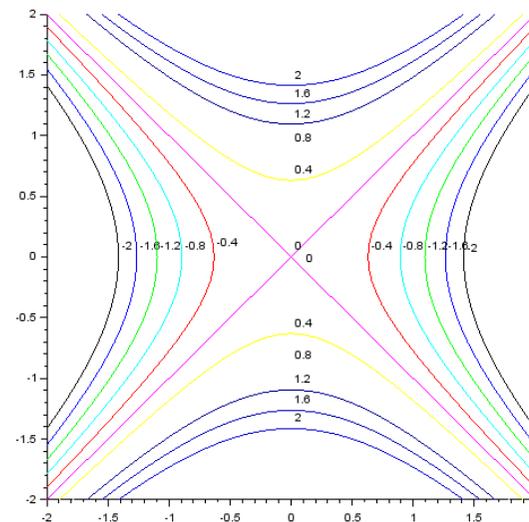
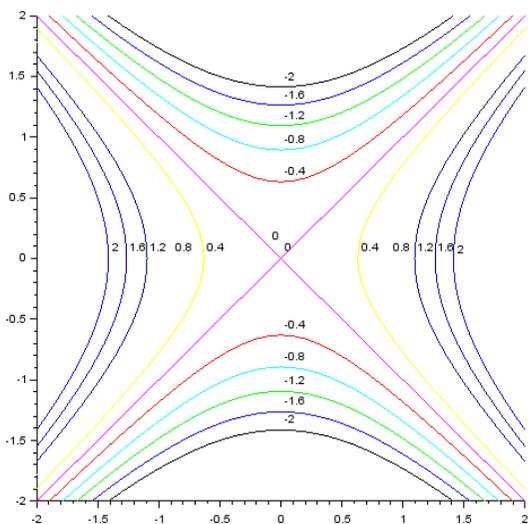


Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.

#### Exercice 2.

Pour les fonctions de l'exercice précédent nous avons tracé les lignes de ni-

veau. Associer chaque graphe à sa fonction ( $x$  est en abscisses et  $y$  en ordonnées).



## Dérivabilité

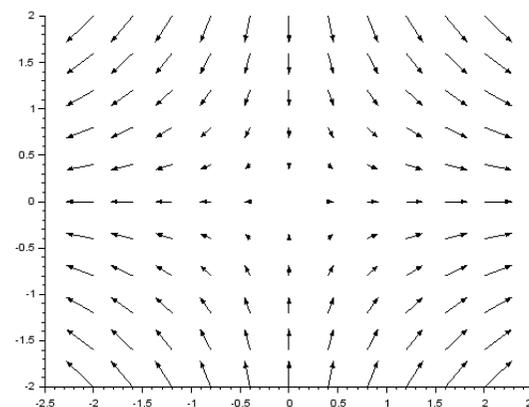
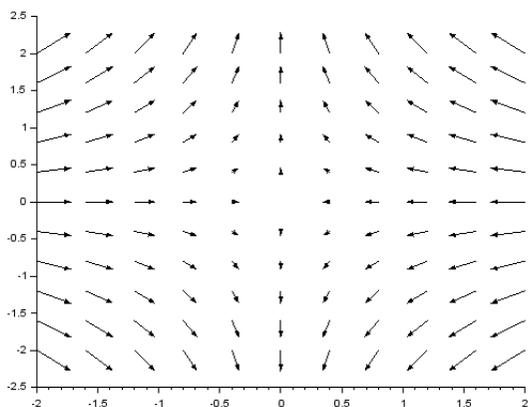
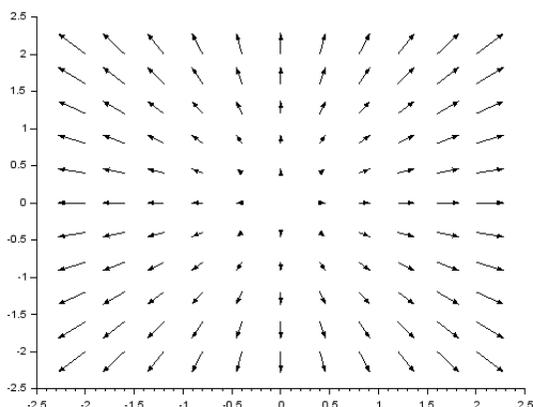
### Exercice 3.

Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes  $\mathcal{C}^1$  sur un ensemble que l'on déterminera.

1.  $(x, y) \mapsto x$ .
2.  $(x, y) \mapsto y$ .
3.  $(x, y) \mapsto x + y$ .
4.  $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$ .
5.  $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ .
6.  $(x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2)$ .
7.  $(x, y) \mapsto \exp(e^x + y)$ .
8.  $(x, y) \mapsto \cos(x) \sin(y)$ .
9.  $(x, y) \mapsto \cos(x + y)$ .
10.  $(x, y) \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$  avec  $\alpha \in ]0; 1[$ .

#### Exercice 4.

Pour les fonctions de l'exercices 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.



#### Exercice 5.

Calculer le gradient puis donner l'approximation par des petites variations en  $(1, 1)$  et l'équation du plan tangent. des fonctions suivantes

1.  $(x, y) \mapsto xy$
2.  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$
3.  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2 + xy$
4.  $(x, y) \mapsto x^2y^2 + xy^3$
5.  $(x, y) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6.  $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$

#### Exercice 6.

Reprendre l'exemple précédent en remplaçant  $(1, 1)$  par  $(1, -1)$ .

## Dérivées d'ordre 2

#### Exercice 7.

Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

## Problèmes

### Exercice 8.

Soit  $f$  la fonction définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

- (a) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ .
- (b) En déduire que le seul point critique de  $f$  est  $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ . Calculer  $m = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ .
- (a) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ .
- (a) Développer  $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$ .
- (b) En déduire que  $m$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- On considère la fonction  $g$  définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

- Utiliser la question 3) pour établir que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$ .
- En déduire que  $g$  possède un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$  et préciser en quel point ce minimum est atteint.

### Exercice 9.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$

- (a) Déterminer les dérivées partielles premières de  $f$ .
- (b) En déduire que le seul point en lequel  $f$  est susceptible de présenter un extremum local est  $A = (-1, 0)$ .
- 
- Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$ .
- (a) Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq xe^x$ .
- (b) En étudiant la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^x$ , conclure que le point critique trouvé à la question 2b) est un extremum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 10.

On pose

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (1+x+y)^2 - (1+x-y)^2$$

- Trouver tous les points critiques de  $f$ .
- tracer le tableau de variations de

$$h : t \mapsto f(-1+t, t) \quad g : t \mapsto f(-1+t, -t) \quad k : t \mapsto f(-1+t, 0)$$

- Le point  $(-1, 0)$  est-il un extremum de  $f$ ?

### Exercice 11 .

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\varphi(x) = 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique  $f$  des variables réelles  $x$  et  $y$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[, \quad f(x, y) = e^{x+4y} \ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de  $f$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Étude des zéros de $\varphi$ .

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ainsi que la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Justifier la dérivabilité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , déterminer sa dérivée.
- Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ , faire apparaître les limites de  $\varphi$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .
- On rappelle que  $\ln(2) \approx 0,7$ . Montrer l'existence de deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

- Proposer un programme en python permettant d'encadrer  $\alpha$  dans un intervalle d'amplitude  $10^{-2}$ . On utilisera le procédé de dichotomie.

**Points critiques de  $f$  sur  $]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[$**

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour  $x$ , et  $y$  strictement positifs

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}e^{x+4y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \frac{1}{y}e^{x+4y} \end{array} \right.$$

3. Montrer que les points de coordonnées respectives  $(\alpha, \frac{\alpha}{4})$  et  $(\beta, \frac{\beta}{4})$  sont des points critiques de  $f$  sur  $]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[$ .
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur  $]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[$  et établir que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, \frac{\alpha}{4}) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha, \frac{\alpha}{4}) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \frac{\alpha}{4}) = \frac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{array} \right.$$

**Exercice 12** (fonctions homogènes ) .

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

1. On définit, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$ . Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que  $f$  est homogène, c'est à dire  $f(tx, ty) = tf(x, y)$  pour tous  $x, y, t \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que pour tous  $x, y, t \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

- (b) En déduire qu'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on déterminera tels que, pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

- (c) Étudier la réciproque.

**Exercice 13** (fonctions invariantes par translation ) .

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , et vérifiant :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

Démontrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

**Exercice 14** (Fonctions harmoniques  ) .

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , est dite harmonique si pour tout  $(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe  $f$  une fonction harmonique.

1. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$ . Démontrer que  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$  sont harmoniques.
2. On suppose désormais que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est radiale, c'est-à-dire qu'il existe  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . Démontrer que  $\varphi'$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.