DL mathématiques n°05
Pour le lundi 4 novembre 2024

Extrait d'une planche d'oral Agro-véto

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotés de 1 jusqu'à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;
- les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement et avec remise.

On note, pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ème tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Écrire une fonction (en Python), prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1;N]\!]$:

$$P(X_{k+1}=i)=\sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}P(X_k=j).$$

4. Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(P(X_k=i))_{1\leqslant i\leqslant N}$ est décroissante.
5. (a) Montrer que la suite $(P(X_k=1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{k+1}=1)\geqslant P(X_k=1)+\frac{1}{N}(1-P(X_k=1)).$$

   (c) En déduire que $\lim_{k\to+\infty}P(X_k=1)=1$.
   Que peut-on dire de l'événement « Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 » ?
6. On fixe i un entier naturel compris entre 2 et N.
   Déduire de la question précédente que, pour tout $i\in[\![2;N]\!]$, $\lim_{k\to+\infty}P(X_k=i)=0$.
7. On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer et nous l'admettrons que :

$$E(Y_N)=1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}.$$

   Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N.