Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

19 octobre 2024

Durée de l'épreuve : 4h

Le devoir comporte un exercice et deux problèmes indépendants. La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés.

Exercice (environ 30 min)

Une urne contient initialement un jeton blanc et un jeton noir.
On effectue une série de tirages aléatoires selon le protocole suivant :

— si le jeton tiré est noir, l'expérience s'arrête ;

— si le jeton tiré est blanc, on le remet dans l'urne puis on double la quantité de jetons blancs présents dans l'urne et on procède à un nouveau tirage.

L'objectif de cet exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de jeton noir, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

On introduit les notations suivantes :

- on note R l'événement « ne jamais obtenir de jeton noir » ;
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « le k-ième tirage a lieu et on obtient un jeton blanc » ;
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des jetons blancs » ;
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « l'expérience se termine à l'issue du n-ième tirage » ;
- et enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = P(B_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Exprimer l'événement B_n à l'aide des événements A_k.
   b) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Donner, en justifiant votre réponse, la valeur de $P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}}(A_k)$.
   c) Montrer que $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^k+1}$.
2. a) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in [0;1]$.
   b) (i) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$: $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   (ii) Démontrer alors que la suite $(-\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   c) En déduire que $\ell \neq 0$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(R_k) = 1 - P(B_n)$.
4. a) Exprimer l'événement $\overline{R}$ à l'aide des événements R_n.
   b) Répondre alors au problème posé.

Problème 1 (environ 2h)

Soit $\alpha > 0$, un réel fixé. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 \geqslant 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$

On considère la fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \alpha\left(x + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$$

Partie I : quelques généralités

1. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f_α sur $]0;+\infty[$. On déterminera aussi les asymptotes éventuelles.
2. Sur le graphique joint à l'énoncé (à rendre avec la copie) sont représentées 5 courbes représentatives de fonctions f_α pour $\alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{3}{4}, \alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
   a) Sur le graphique, préciser pour chaque courbe la valeur de α correspondante.
   b) Compléter le graphique de façon à visualiser les premiers termes des 5 suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ obtenues pour chaque valeur de α : on prendra $u_0 = 1$ pour $\alpha = \frac{3}{4}$ et $\alpha = 2$ et on prendra $u_0 = 4$ pour $\alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$.
   c) Pour chacune de ces suites, conjecturer son comportement (sens de variation, limite éventuelle).
   La réponse est à indiquer en dessous du graphique.
3. Quelques résultats généraux pour $\alpha > 0$ quelconque.
   a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie avec pour tout entier n, $\quad u_n > 0$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n \geqslant 2\alpha$.
   c) On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel ℓ.
   Montrer qu'alors, on a nécessairement $\alpha < 1$ et calculer ℓ en fonction de α.
   d) Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite dans les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$? (Justifier la réponse).

Partie II : étude du cas $\alpha = \frac{3}{4}$

On suppose **dans cette partie** que $u_0 = 1$.

4. Calculer u_1, puis montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $\quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Indication : on pourra utiliser les variations de f_α.
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\quad u_n \leqslant \sqrt{3}$.
6. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans ce cas. Si elle converge donner sa limite.

Partie III : étude du cas $\alpha = \frac{1}{2}$

7. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans le cas où $u_0 = 1$?

On suppose pour les questions 8., 9. et 10. que $u_0 > 1$.

8. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\quad u_n > 1$.

On pose alors pour tout $n \geqslant 0$, $\quad v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$.

9. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique et expliciter v_n en fonction de v_0 et de n.
   b) Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
10. Exprimer u_n en fonction de v_n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, si elle converge donner sa limite.

Partie IV : étude du cas $\alpha = \frac{1}{4}$

Dans cette partie on reprend l'hypothèse $u_0 \geqslant 1$.

11. Montrer que pour $x \geqslant \frac{1}{2}$, $\quad -\frac{3}{4} \leqslant f'_\alpha(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
12. On pose $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
    a) Rappeler l'énoncé général de la formule des accroissements finis.
    b) Montrer que : pour tout $n \geqslant 0$, $\quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \beta|$.
13. a) En déduire qu'il existe une constante C, que l'on exprimera en fonction de u_0 et β, telle que :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad |u_n - \beta| \leqslant C\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

    b) Conclure alors quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans ce cas.

Partie V : étude du cas $\alpha = 2$

Dans cette partie, on suppose que $\underline{u_0 > 1}$.

14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
15. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

On pose alors pour tout $n \geqslant 0$, $\quad w_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

16. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
    Indication : on pourra utiliser la question 3.b).
17. En déduire la nature de la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$.
18. En déduire que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
    (On pourra utiliser le fait que pour $n \geqslant 1$, $\quad w_n = w_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)$)
19. Finalement, montrer qu'il existe une constante $\lambda \geqslant 1$ (que l'on ne cherchera pas à calculer), telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, 2^n.$$

Problème 2 (environ 1h30)

Partie I

Dans cette partie on recherche des fonctions V de deux variables réelles strictement positives x et y qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \qquad x(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y(1-x)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y). \tag{E}$$

On suppose dans cette partie que V peut s'écrire sous la forme :

$$V(x,y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

où φ et ψ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Donner une expression simple de $x(1-y)\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y)$ et de $y(1-x)\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y)$.
2. Trouver deux fonctions non nulles φ et ψ telles que V soit une solution de (E).

Partie II

On considère le système des deux équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \quad x - xy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= \; -y + xy \end{cases} \tag{S}$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable réelle t, de dérivées $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$.

3. Montrer que pour tout T réel, si x et y sont solutions de (S), alors les fonctions $t \mapsto x(t+T)$ et $t \mapsto y(t+T)$ sont aussi solutions de (S).
4. Soit (x,y) un couple de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, solution de (S) et tel que les fonctions x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que si V satisfait à (E) alors la fonction composée $t \mapsto V(x(t), y(t))$ est constante.

Partie III

On considère dans cette partie la fonction V définie pour x et y strictement positifs par

$$V(x, y) = \ln(xy) - (x + y).$$

5. Justifier que V possède des dérivées partielles d'ordre 2, et les calculer.
6. Montrer que V ne peut posséder d'extremum qu'en un seul point, que l'on déterminera.
7. Montrer que V atteint un maximum au point trouvé.
   On pourra commencer par démontrer rapidement que pour tout t réel positif $\ln(t) \leqslant t - 1$.
8. Parmi les trois graphes représentant des lignes de niveau (en annexe) indiquer lequel est celui lié à V et justifier votre réponse en une phrase.

Partie IV

On désigne par (X, Y) la solution de (S) qui vérifie la condition initiale $X(0) = 2$, $Y(0) = 1$ (on admet l'existence et l'unicité de cette solution sur $\mathbb{R}$, et que $X(t)$ et $Y(t)$ prennent des valeurs strictement positives).

9. Montrer que, pour tout t réel,

   $$\frac{\mathrm{e}^{X(t)}}{X(t)} = KY(t)\mathrm{e}^{-Y(t)}$$

   où K est une constante qu'on déterminera.
10. Donner le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0,\ +\infty[$ par $f(u) = \dfrac{\mathrm{e}^u}{u}$, on donnera les limites aux bords de l'ensemble de définition.

Pour les questions suivantes vous devez vous aider du tableau de variation précédent et donner des réponses rapides. Ces questions sont du niveau ENS ! vos réponses ne seront corrigées que si ce qui précède a été traité convenablement.

11. Justifier qu'il existe un nombre $0 < \lambda < 1$ tel que, pour tout t réel,

    $$\lambda \leqslant X(t) \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \lambda \leqslant Y(t) \leqslant 2$$

12. Justifer qu'étant donné x tel que $\lambda < x < 2$, l'équation en y

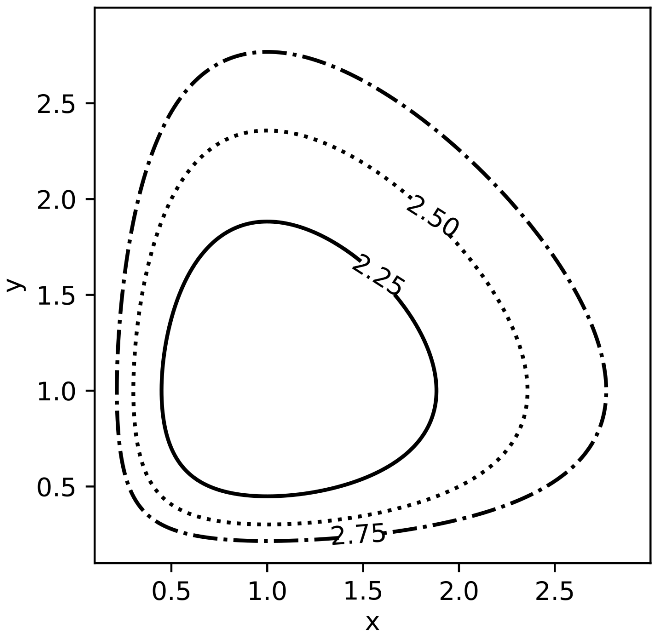
    $$Ky\mathrm{e}^{-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

    possède exactement deux solutions positives comprises entre λ et 2 .
13. Justifier que si le couple (x, y) vérifie l'équation

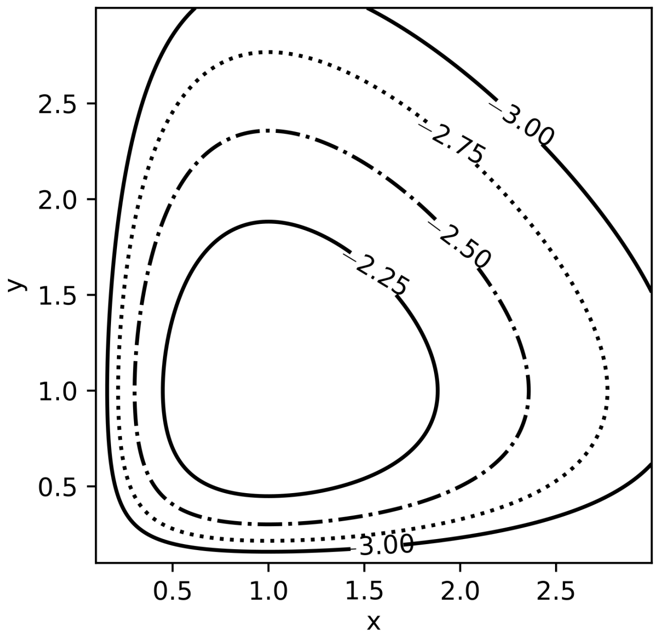
    $$Ky\mathrm{e}^{-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

    il en est de même du couple (y, x).
14. Justifier que si t_0 est un réel tel que $X(t_0) = 2$, ou $X(t_0) = \lambda$, alors on a $Y(t_0) = 1$, $X'(t_0) = 0$ et $Y'(t_0) \neq 0$.
15. Montrer que les solutions X et Y sont périodiques de même période.

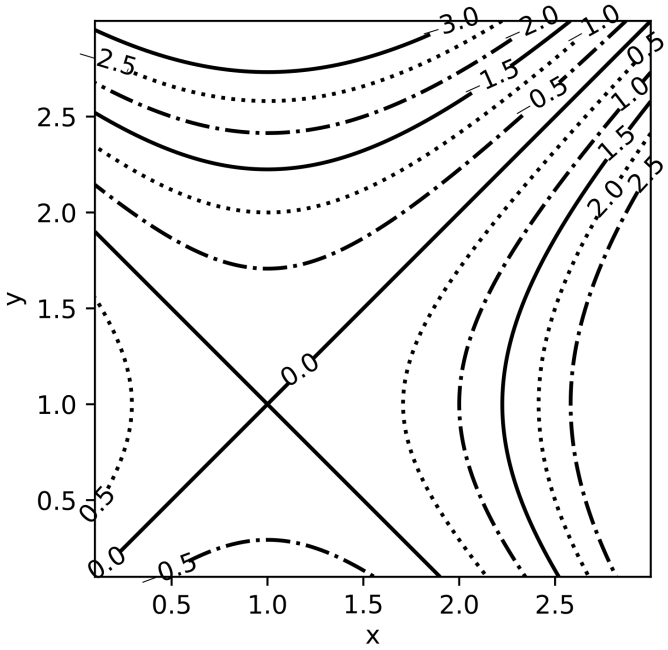
ANNEXES



Choix 1



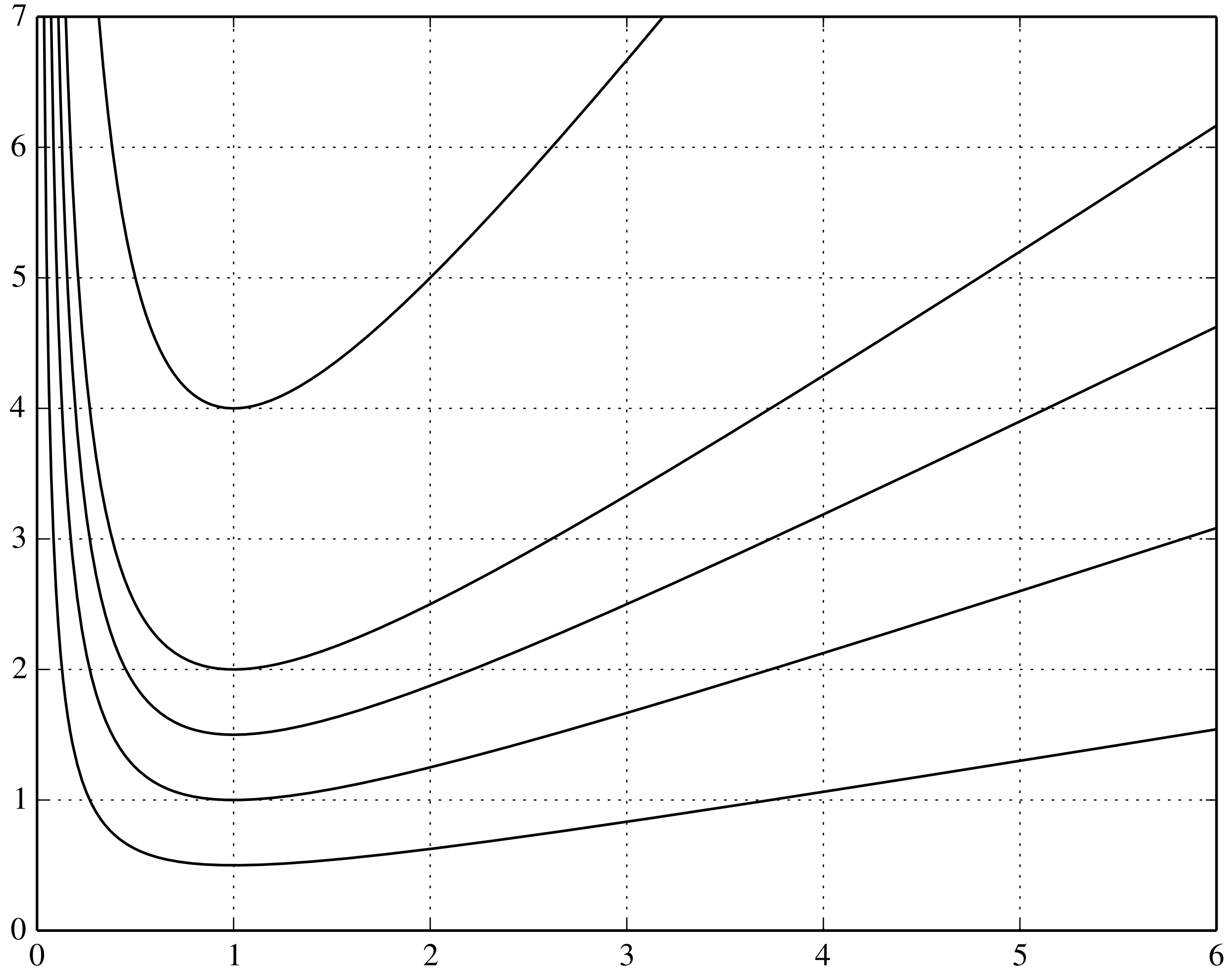
Choix 2



Choix 3

Faites attention aux signes moins !

NOM : ....



Réponse à la question 2. c)