Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Exercice

1. a) D'après la description des événements donnée dans l'énoncé on peut écrire :

$$\boxed{B_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.}$$

b) D'après la description de l'expérience, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}+1},}$$

car si les $k-1$ premiers tirages ont donnés des jetons blancs, alors au moment d'effectuer le k-ième tirage l'urne contient 2^{k-1} jetons blancs et 1 jeton noir.

c) D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$u_n = P(B_n) = P(A_1) \times P_{A_2}(A_1) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

On a donc, d'après la question précédente, $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2+1} \times \ldots \times \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}$, c'est-à-dire $\boxed{u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{2^k}{2^k+1}.}$

2. a) u_n est un réel strictement positif et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^n+1} < 1.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$

u_n étant une probabilité, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell \in [0;1].}$

b) (i) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $1+x \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1+x) \geqslant 0$.

On pose maintenant, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$. On peut donc en déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(1+x) \leqslant x$.

En résumé, $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.}$

(ii) On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\ln(u_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2^k}{2^k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. Donc, par somme d'encadrement, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
\Leftrightarrow & 0 \leqslant -\ln(u_n) \leqslant \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \\
\Leftrightarrow & 0 \leqslant -\ln(u_n) \leqslant 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
\Rightarrow & 0 \leqslant -\ln(u_n) \leqslant 2.
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on peut en déduire (en exploitant la croissance de la fonction ln) que la suite $(-\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus, on vient de montrer qu'elle est majorée par 2. Donc $\boxed{(-\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$

Autre rédaction possible :

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$.

On sait que la série $\sum \frac{1}{2^k}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1;1[$.

Donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est convergente.

Cela signifie que la suite des sommes partielles de cette série admet une limite finie et donc que $-\ln(u_n)$ admet une limite finie.

c) Supposons que $\ell = 0$. Alors, par composition de limites, on devrait avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(u_n) = +\infty$, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente. Donc, $\boxed{\ell \neq 0.}$

3. L'événement $\overline{B_n}$ signifie que l'un des n premiers tirages a donné un jeton noir.
On a donc $\overline{B_n} = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n$. Les événements $(R_1, \ldots, R_n)$ étant deux à deux incompatibles, on peut écrire que :

$$P(\overline{B_n}) = \sum_{k=1}^{n} P(R_k).$$

Enfin, comme $P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n)$, on a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(R_k) = 1 - P(B_n).}$

4. a) L'événement $\overline{R}$ signifie que l'expérience s'est terminée à un moment, c'est-à-dire qu'on a obtenu un jeton noir. On a donc $\boxed{\overline{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n.}$

b) Les événements $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant incompatibles deux à deux, on a

$$P(\overline{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(R_n).$$

D'après la question précédente, on a donc $P(\overline{R}) = \lim\limits_{N\to+\infty} 1 - P(B_N) = 1 - \ell$.

On peut donc en déduire que $\boxed{P(R) = \ell \text{ et donc } P(R) \neq 0.}$

Problème 1

Partie I : quelques généralités

1. La fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha\left(x + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'_\alpha(x) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \alpha\frac{x^2-1}{x^2} \text{ qui est du signe de } x^2 - 1$$

D'où le tableau de variations de f_α

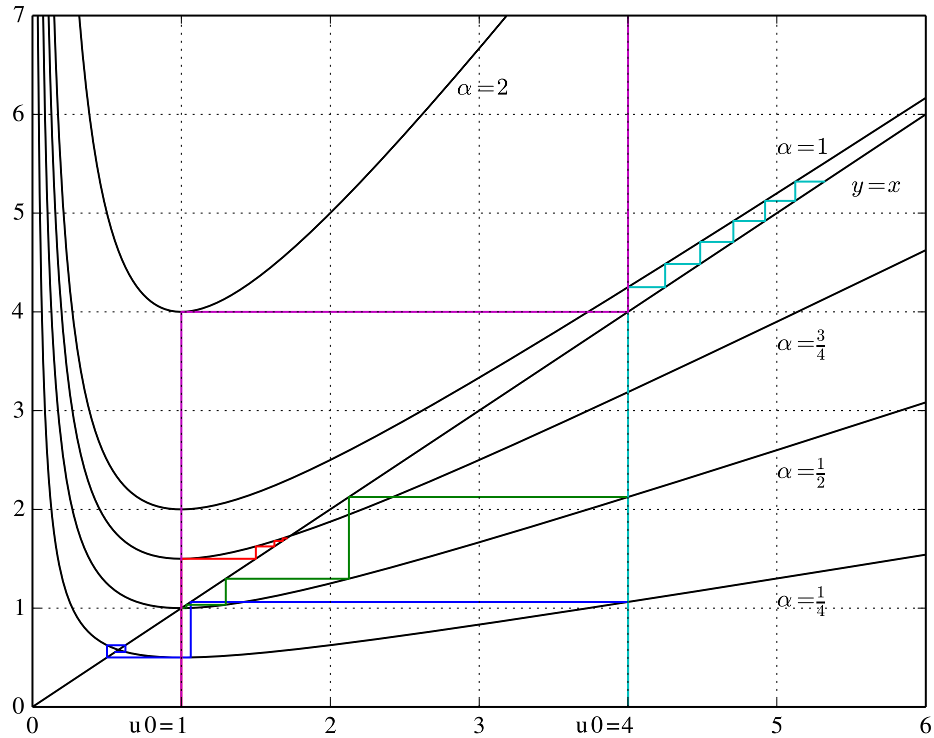
x	0		1		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_\alpha(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	2α	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f_α possède deux branches infinies.

$\boxed{\text{En } 0\text{, la courbe représentative de } f_\alpha \text{ admet une asymptote verticale, l'axe des ordonnées.}}$

En $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x = 0$. Donc la courbe représentative de f_α admet au voisinage de $+\infty$ une $\boxed{\text{asymptote oblique, la droite d'équation } y = \alpha x.}$

2. a)



b)

c) On conjecture que :

— Pour $u_0 = 1$ et $\alpha = \dfrac{3}{4}$: la suite est croissante et convergente (vers 1.75 environ).

— Pour $u_0 = 1$ et $\alpha = 2$: la suite est croissante et diverge vers $+\infty$.

— Pour $u_0 = 4$ et $\alpha = \dfrac{1}{4}$: la suite n'est pas monotone et converge (vers 0.5 environ).

— Pour $u_0 = 4$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$: la suite est décroissante et converge (vers 1 environ).

— Pour $u_0 = 4$ et $\alpha = 1$: la suite est croissante et diverge vers $+\infty$.

3. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: " u_n existe et $u_n > 0$ " est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
u_0 est donné par l'énoncé et on suppose que $u_0 \geqslant 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Comme $u_n > 0$, on peut bien calculer $\alpha\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ donc u_{n+1} existe.

De plus, par somme et produit de réels strictement positifs, $u_{n+1} > 0$.

On a donc vérifié que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors vraie.

Grâce au principe de récurrence nous avons montré que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie}}$ et pour tout entier n, $\boxed{u_n > 0}$.

b) On a alors pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = f_\alpha(u_{n-1}) \geqslant 2\alpha$ puisque 2α est le minimum de f_α sur $]0, +\infty[$.

On a montré : $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant 2\alpha}$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 2α, si elle converge la limite ℓ vérifie donc $\ell \geqslant 2\alpha$ et en particulier $\ell > 0$.
La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc en ℓ) et la suite vérifie $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si la suite converge vers ℓ, on en déduit par passage à la limite dans l'égalité que $\ell = f_\alpha(\ell)$. Or

$$\ell = f_\alpha(\ell) \Leftrightarrow \alpha\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right) = \ell \Leftrightarrow (1-\alpha)\ell^2 = \alpha$$

Comme $\alpha > 0$, la dernière égalité n'est possible que si $1 - \alpha > 0$.

Donc $\boxed{\text{si } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers un réel } \ell \text{ alors } \alpha < 1}$ et on a de plus $\boxed{\ell = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$ car $\ell > 0$.

d) D'après la question précédente, on a par contraposée : si $\alpha \geqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge. Ainsi pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ diverge}}$.

Partie II : étude du cas $\alpha = \dfrac{3}{4}$

4. On calcule $u_1 = f_\alpha(u_0) = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \boxed{\frac{3}{2}}$.

   D'autre part, d'après 3.b., $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 2\alpha = \frac{3}{2}$ donc comme $u_0 = 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
   On a bien $u_0 \leqslant u_1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Comme la fonction f_α est croissante sur $[1, +\infty[$, on a $f_\alpha(u_n) \leqslant f_\alpha(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. On obtient donc le résultat cherché au rang $n+1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

5. On calcule $f_\alpha(\sqrt{3}) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ et on procède par récurrence.

   Au rang 0, on a $u_0 \leqslant \sqrt{3}$. Supposons que $u_n \leqslant \sqrt{3}$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, alors par croissance de f_α sur $[1, +\infty[$, on a $u_{n+1} \leqslant \sqrt{3}$. On en déduit ainsi par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant \sqrt{3}.}$

6. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée (par $\sqrt{3}$), elle converge donc. Par la question 4.b. la seule limite possible est $\ell = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}} = \sqrt{3}$. On a donc : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \sqrt{3}.}$

Partie III : étude du cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$

7. Comme $f_\alpha(1) = 1$, on montre par récurrence que $\boxed{\text{si } u_0 = 1 \text{ la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est constante égale à 1.}}$

8. On a supposé $u_0 > 1$. Comme f_α est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on montre par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad u_n > 1.}$

   On peut donc bien définir pour tout $n \geqslant 0$, $\quad v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$.

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) - 1}{\frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n + 1 + 2u_n}\right) = \ln\left(\frac{(u_n-1)^2}{(u_n+1)^2}\right) \\ &= 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = 2v_n \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 0} \text{ est donc une suite géométrique de raison 2.}}$

   $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n v_0.}$

   b) On sait que $0 < u_0 - 1 < u_0 + 1$ donc $\frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} < 1$ d'où $v_0 < 0$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ tend vers } -\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)$, donc $e^{v_n} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
D'où $e^{v_n}(u_n + 1) = u_n - 1$, puis $u_n(1 - e^{v_n}) = e^{v_n} + 1$ et donc

$$\boxed{u_n = \frac{1 + e^{v_n}}{1 - e^{v_n}}}.$$

Comme (v_n) tend vers $-\infty$ on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$

Partie IV : étude du cas $\alpha = \dfrac{1}{4}$

11. Pour $x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
Pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a $x^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 4$ d'où $-4 \leqslant -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{4}(1-4) \leqslant f'_\alpha(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, ce qui nous donne bien $\boxed{-\dfrac{3}{4} \leqslant f'_\alpha(x) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

12. a) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

b) Par la question 3.b. on sait que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. Comme $u_0 \geqslant 1$, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
De plus, on a aussi $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissement finis entre u_n et β on obtient qu'il existe un réel c compris strictement entre u_n et β tel que

$$\frac{f_\alpha(u_n) - f_\alpha(\beta)}{u_n - \beta} = f'_\alpha(c)$$

Donc

$$\left|\frac{f_\alpha(u_n) - f_\alpha(\beta)}{u_n - \beta}\right| = |f'_\alpha(c)|$$

Comme $c \geqslant \dfrac{1}{2}$ (puisque c est entre u_n et β), on a d'après 7. $|f'_\alpha(c)| \leqslant \dfrac{3}{4}$ et comme $f_\alpha(\beta) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \beta$, on a donc $\boxed{|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \beta|}$.

13. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n) : |u_n - \beta| \leqslant |u_0 - \beta|\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Comme $\left(\dfrac{3}{4}\right)^0$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente on a alors :

$$|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \beta| \leqslant \frac{3}{4} \times |u_0 - \beta|\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Donc $|u_{n+1} - \beta| \leqslant |u_0 - \beta|\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_n - \beta| \leqslant |u_0 - \beta|\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

b) Comme $|u_0 - \beta|\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$), on en déduit que $|u_n - \beta|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers } \beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.}$

Partie V : étude du cas $\alpha = 2$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n + \dfrac{2}{u_n}$ qui est donc positif d'après 3.a. : $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$

    De plus d'après 3.d., la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge car $\alpha \geqslant 1$. On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty.}$

15. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(1 + \dfrac{1}{u_n^2}\right)$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2.}$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{u_n}{2^n} = \dfrac{2(u_n + \frac{1}{u_n})}{2^{n+1}} - \dfrac{u_n}{2^n}$ d'où $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$ qui est positif.

    De plus, d'après 3.b. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 4 \geqslant 1$ et $u_0 > 1$ donc pour tout entier n, $u_n \geqslant 1$.

    On a donc bien pour tout $n \geqslant 0$, $\boxed{0 \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}.}$

17. On sait que la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$.

    Donc, avec la question précedente, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum (w_{n+1} - w_n) \text{ est convergente.}}$

18. On vérifie que pour $n \geqslant 1$, $\quad w_n = w_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)$ en utilisant que la somme qui apparait est une somme télescopique.

    D'après la question précédente, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)\right)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

    Donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente.}}$

19. Notons λ la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    Par croissance de $(w_n)_{n\geqslant 0}$ (question 16.), $\lambda \geqslant w_0 = u_0 > 1$. On peut donc en déduire que $w_n \sim \lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$ et donc que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, 2^n.}$

Problème 2

Partie I

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\boxed{x(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = x(1-y)\varphi'(x) \text{ et } y(1-x)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = y(1-x)\psi'(y).}$$

2. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} V \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ x(1-y)\varphi'(x) = y(1-x)\psi'(y) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ x(1-y)\varphi'(x) = y(1-x)\psi'(y). \end{aligned}$$

   On remarque alors qu'en prenant φ et ψ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \varphi'(x) = \frac{1-x}{x} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi'(y) = \frac{1-y}{y},$$

   l'égalité demandée est bien vérifiée.

   Ainsi, par exemple les fonctions φ et ψ définies par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \varphi(x) = \ln(x) - x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi(y) = \ln(y) - y,}$$

   répondent à la question.

Partie II

3. Soit T un réel fixé et x et y deux solutions de (S).
On note $w : t \mapsto x(t+T)$ et $z : t \mapsto y(t+T)$.
Les fonction w et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables et, pour tout t réel :
$$w'(t) = 1 \times x'(t+T) = x(t+T) - x(t+T)y(t+T) = w(t) - w(t)z(t)$$
$$z'(t) = 1 \times y'(t+T) = -y(t+T) + x(t+T)y(t+T) = -z(t) + w(t)z(t)$$
Donc $\boxed{(w,z) \text{ est aussi une solution de } (S).}$

4. On suppose donc que V satisfait à (E) et (x,y) est une solution de (S).
La fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*+* \times \mathbb{R}^{+*}$, donc par composée avec la fonction V qui est dérivable par rapport à ses deux variables, la fonction $\gamma : t \mapsto V(x(t), y(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t :
$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= x'(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t)) \\ &= x(t)(1-y(t))\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t)) - y(t)(1-x(t))\frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t)) \qquad \text{car } (x,y) \text{ est solution de (S)} \\ &= 0 \qquad \text{car } V \text{ satisfait (E).}\end{aligned}$$
$\boxed{\text{La fonction } \gamma : t \mapsto V(x(t),y(t)) \text{ est donc bien constante sur } \mathbb{R}.}$

Partie III

5. La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions usuelles, et elle est à **valeurs dans** $\mathbb{R}^{+*}$ sur ce pavé. La fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
La fonction usuelle $(x,y) \mapsto x+y$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, par somme
$$\boxed{V \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}.}$$
On constate que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad V(x,y) = \ln(x) - x + \ln(y) - y$$
ce qui permet de calculer rapidement
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - 1 \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - 1.}$$
Puis
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.}$$

6. La fonction V est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. Sur ce **pavé ouvert**, les extréma globaux (x,y), qui sont des extrema locaux, sont forcément des **points critiques** qui vérifient $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = \overrightarrow{0}$
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{y} - 1 &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{V \text{ ne peut posséder un extrémum qu'en } (1,1)}$$

7. On constate que $V(1,1) = -2$. De plus la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et concave, son graphe est donc en dessous de ses tangentes. Au point $t = 1$ la tangente à la courbe a pour équation $y = t - 1$ et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln(t) \leqslant t - 1.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln(x) - x + \ln(y) - y \leqslant -1 + (-1)$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad V(x,y) \leqslant V(1,1)$$

$$\boxed{V \text{ atteint un maximum en } (1,1), \text{ la valeur du maximum est } -2 \text{ et ce réel est le seul extremum.}}$$

Remarque : Il est facile de vérifier que c'est un maximum strict c'est à dire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \setminus \{(1,1)\}, \qquad V(x,y) < V(1,1)$$

On notera que dans cette définition on a enlevé le point $(1,1)$.

8. Les lignes de niveau de V correspondent au choix 2 car on vient de montrer que V admet en $(1,1)$ un maximum égal à -2 et sur cette figure on voit des lignes donc le niveau « diminue ».

Partie IV

9. La fonction V de la partie III satisfait (E) et on suppose que (X,Y) est solution de (S) et que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc, d'après la question 4. on sait que la fonction $t \mapsto V(X(t), Y(t))$ est constante. Ainsi, pour tout réel t :

$$\begin{aligned}
& V(X(t), Y(t)) = V(X(0), Y(0)) \\
\Leftrightarrow\ & \ln(X(t)Y(t)) - X(t) - Y(t) = \ln(2) - 3 \\
\Leftrightarrow\ & X(t)Y(t) = \mathrm{e}^{\ln(2) - 3 + X(t) + Y(t)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^{X(t)}}{X(t)} = \frac{\mathrm{e}^3}{2} Y(t)\mathrm{e}^{-Y(t)}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{X(t)}}{X(t)} = KY(t)\mathrm{e}^{-Y(t)} \text{ avec } K = \dfrac{\mathrm{e}^3}{2}.}$

10. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(u) = \dfrac{u-1}{u^2}\mathrm{e}^u$. On a donc le tableau de variations suivant :

u	0		1		$+\infty$
$f'(u)$	||	$-$	0	$+$	
$f(u)$	|| $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = +\infty$ par simple opération sur les limites et $\lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = +\infty$ d'après les croissances comparées.

11. À La question 9 nous avons montré que la solution (X,Y) vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(X(t)) = \frac{K}{f(Y(t)}$$

avec $K = \dfrac{\mathrm{e}^3}{2}$ Le tableau de variations précédent permet d'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(Y(t)) \geqslant \mathrm{e}$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{\dfrac{\mathrm{e}^3}{2}}{f(Y(t)} \geqslant \mathrm{e}$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(Y(t)) \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

Or $f(2) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ et le théorème de la bijection nous permet d'affirmer qu'il existe $\lambda \in]0;\ 1[$ tel que $f(\lambda) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ et en utilisant le tableau de variation.

$$\forall u \in]0;\ +\infty[\qquad u \notin]\lambda;\ 2[\Rightarrow f(u) > \frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

par contraposée

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda \leqslant Y(t) \leqslant 2}$$

Comme on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(Y(t)) = \frac{K}{f(X(t))}$$

on peut conclure

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda \leqslant X(t) \leqslant 2}$$

12. Toutes les quantités manipulées étant strictement positives, cette équation peut s'écrire

$$\frac{K}{f(x)} = f(y)$$

u	0	λ	1	2	$+\infty$
$f'(u)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(u)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ $\mathrm{e}^2/2$ $\searrow$	e	$\nearrow$ $\mathrm{e}^2/2$ $\nearrow$	$+\infty$

Soit $x \in]\lambda,\ 2[$ d'après ce qui précède

$$\mathrm{e} \leqslant f(x) < \frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

donc

$$\mathrm{e} < \frac{K}{f(x)} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

On peut appliquer le théorème de la bijection monotone sur $]\lambda;\ 1[$ puis $]1;\ 2]$ pour montrer l'existence de deux solutions y telles que

$$f(y) = \frac{K}{f(x)}$$

Le tableau de variations permet aussi de montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad y \notin [\lambda;\ 2] \Rightarrow f(y) > 2 \geqslant \frac{K}{f(x)}$$

et donc qu'il n'y a pas d'autres solutions

L'équation admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et ces soltutions sont comprises entre λ et 2

13. Immédiat
14. Supposons que $X(t_0) \in \{\lambda, 2\}$ alors $f(X(t_0)) = \dfrac{2^2}{2}$. D'après la question 9

$$f(Y(t_0)) = \frac{K}{f(X(t_0)} = \mathrm{e}$$

En lisant le tableau de variations la seule solution de $f(y) = \mathrm{e}$ est 1

$$\boxed{f(Y(t_0)) = 1}$$

De plus X et Y sont solutions de (S).

$$X'(t_0) = X(t_0) - X(t_0)Y(t_0) = X(t_0) - X(t_0) \times 1$$

$$\boxed{X'(t_0) = 0}$$

et

$$Y'(t_0) = -Y(t_0) + X(t_0)Y(t_0) = X(t_0) - 1$$

donc comme $x(t_0) \neq 1$ (car $\lambda \neq 1$)

$$\boxed{Y'(t_0) \neq 0}$$

15. **Étape 1** Montrons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $X(t_0) = 2$.

Étape 2 Montrons que la solution est périodique.

Soit le réel t_0 trouvé dans l'étape précédente on pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \tilde{X}(t) = X(t + t_0) \qquad \tilde{Y}(t) = Y(t + t_0)$$

D'après la question 3 $(\tilde{X},\ \tilde{Y})$ est aussi solution de (S) et d'apès la question 14 , $\tilde{X}(0) = 2$ $\tilde{Y}(0) = 1$, donc l'unicité des solutions au système différentiel, muit de ces conditions initiales

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \tilde{X}(t) = X(t) \qquad \tilde{Y}(t) = Y(t)$$

16. **Tracer des solutions** Les questions précédentes permettent de donner l'allure des courbes solutions $t \mapsto (X(t), Y(t))$. En effet
    - Les courbes solutions sont portées par les signes de niveau de V (question 4)
    - Les solutions sont périodiques
    - D'après l'équation (S) si il existait un réél t_1 tel que $X'(t_1) = Y'(t_1) = 0$ alors on aurait $X(t_1) = Y(t_1) = 1$ ce qui serait en contradiction avec le résultat de la question 9. Le point $(X(t), Y(t))$ ne "s'arrête jamais".

    La trajectoire de $t \mapsto (X(t), Y(t)$ parcourt donc toute la ligne de niveau de V qui passe par $(2, 1)$ et ce de façon périodique et toujours dans le même sens. La question 13 montre que la trajectoire est symétrique par rapport à la droite $y = x$.