Correction DL mathématiques n°05

1. X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ car on effectue le premier tirage dans l'urne N.
2.
```
from random import randint

def premier1(N):
    jeton=randint(1,N)
    tirage=1
    while jeton!=1:
        tirage+=1
        jeton=randint(1,jeton)
    return tirage
```
3. D'après la formule des probabilités totale appliquée avec le système complet d'événements $([X_k = j])_{1\leqslant j\leqslant N}$, on a :

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=i) &= \sum_{j=1}^{N} P(X_k=j)P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)\\ &= \sum_{j=1}^{i-1} P(X_k=j)\underbrace{P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)}_{=0}\\ &\quad + \sum_{j=i}^{N} P(X_k=j)\underbrace{P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)}_{=\frac{1}{j}}\\ &= \sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}P(X_k=j).\end{aligned}$$

4. Pour $k\geqslant 2$ et $i\in[\![1;N-1]\!]$:

$$\begin{aligned}P(X_k=i+1)-P(X_k=i) &= \sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{j}P(X_{k-1}=j)-\sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}P(X_{k-1}=j)\\ &= -\frac{1}{i}P(X_{k-1}=i)<0.\end{aligned}$$

Donc la suite est bien décroissante. Et pour $k=1$ elle est constante.

5. (a) $P(X_{k+1}=1)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}P(X_k=j)=P(X_k=1)+\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}P(X_k=j)$.
   Donc $P(X_{k+1}=1)\geqslant P(X_k=1)$ et la suite $(P(X_k=1))$ est croissante.
   De plus elle est majorée par 1 donc elle est convergente.

   (b) On a vu que : $P(X_{k+1}=1)=P(X_k=1)+\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}P(X_k=j)$.
   Or Pour $2\leqslant j\leqslant N$, on a $\frac{1}{j}\geqslant\frac{1}{N}$, donc

$$P(X_{k+1}=1)\geqslant P(X_k=1)+\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N}P(X_k=j)}_{=\frac{1}{N}(1-P(X_k=1))}.$$

   (c) Notons $\ell=\lim_{k\to+\infty}P(X_k=1)$. On a donc $\ell\in[0;1]$.
   De plus, en passant à la limite dans l'inégalité précédente on a :

$$\ell\geqslant\ell+\frac{1}{N}(1-\ell)\Leftrightarrow 0\geqslant\frac{1}{N}(1-\ell)\Leftrightarrow\ell\geqslant 1.$$

   Donc $\ell=1$.
   Notons A l'événement « tous les tirages donne un numéro différent de 1 ».
   On a $A=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{[X_k=1]}$. Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A\subset\overline{[X_k=1]}$ donc :

$$0\leqslant P(A)\leqslant P(\overline{[X_k=1]}).$$

   En passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$, on obtient $P(A)=0$.

6. Soit i compris entre 2 et N. On sait que $[X_k=i]\subset\overline{[X_k=1]}$, donc

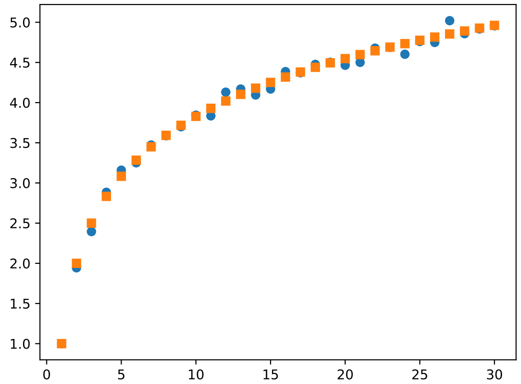
$$0\leqslant P(X_k=i)\leqslant P(\overline{[X_k=1]})=1-P(X_k=1).$$

Par encadrement de limites (ou théorème des gendarmes), on obtient que $\lim_{k\to+\infty}P(X_k=i)=0$.

7.
```
import matplotlib.pyplot as plt
def esperanceY(N):
    esp=0
    for k in range(1000):
        esp+=premier1(N)
    return esp/1000

N=[i for i in range(1,31)]
E=[esperanceY(n) for n in N]
Theorie=[1+sum([1/i for i in range(1,n)]) for n in N]

plt.plot(N,E,'o')
plt.plot(N,Theorie,'s')
plt.show()
```


5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0
5
10
15
20
25
30