DL mathématiques n°06
Pour le mercredi 13 novembre 2024

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. En distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, calculer la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.
   Indication : en supposant l'événement $(X = k)$ réalisé, on reconnaitra le schéma d'une loi usuelle.
4. On rappelle les commandes fonctions suivantes, présentes dans le module `random` qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

   - `randint(a,b)` Simule une réalisation d'une variable suivant la loi $\mathscr{U}([\![a, b]\!])$
   - `binomialvariate(n, p)` Simule une réalisation d'une variable suivant la loi $\mathscr{B}(n, p)$

   Écrire une fonction en python qui permet de simuler les variables X et Y.
5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$ puis montrer que :
   $$P(Y = 0) = \frac{q\left(1 - q^n\right)}{n(1 - q)}$$
   Indication : on pourra utiliser le système complet d'événements $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$.
   (b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

La suite du Dl est facultative

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité :
   $$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$
   (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :
   $$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$$
   (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$
7. (a) Établir que :
   $$\forall n \geqslant 2, \qquad E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)$$
   (b) Montrer que l'on a :
   $$\forall n \geqslant 2, \qquad E(Y(Y-1)) = \frac{\left(n^2 - 1\right)p^2}{3}$$
   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$
   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$