

Polynômes

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Novembre 2024

Table des matières

I Rappels sur les complexes et la trigonométrie	2
I.1 Définitions et premières propriétés.	2
I.2 Applications à la trigonométrie.	4
II Polynômes	5
II.1 Des fonctions polynomiales aux polynômes	5
II.2 Polynômes à coefficients complexes	5
II.3 Propriétés	7
II.4 Autres opérations	8
III Racines et factorisation	9
III.1 Racines	9
III.2 Racines multiples	10
III.3 Factorisation	10
III.3.a Dans $\mathbb{C}[X]$	10
III.3.b Dans $\mathbb{R}[X]$	11
III.3.c HP Cas général du procédé d'indentification	11
IV Résultats classiques qui ne sont pas au programme	12
IV.1 Racines de l'unité	12

I Rappels sur les complexes et la trigonométrie

Dans toute la suite lorsque l'on introduira un complexe sous la forme $a = a + ib$, il est sous entendu que a et b sont des réels.

I.1 Définitions et premières propriétés.

Définition 1 (Forme algébrique).

Tout complexe z peut se mettre de façon unique sous la forme $z = a + ib$. où a et b sont des réels. Cette forme est unique.

- a est la **partie réelle** de z , elle est notée $Re(z)$.
- b est la **partie imaginaire** de z , elle est notée $Im(z)$.
- On dit que z est un **imaginaire pur** si et seulement si $Re(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$

l'ensemble des imaginaires purs.

Définition 2 (Conjugaison).

Soit $z = a + ib$ un complexe, on appelle **conjugué** de z , que l'on note \bar{z} l'unique complexe :

$$\bar{z} = a - ib$$

Proposition 1 (Propriétés de la partie réelle et de la partie imaginaire.).

Soit z et z' deux complexes, α et β deux réels.

- $Re(\alpha \cdot z + \beta \cdot z) = \alpha Re(z) + \beta Re(z)$
- $Im(\alpha \cdot z + \beta \cdot z) = \alpha Im(z) + \beta Im(z)$
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = i Im(z)$.
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = Re(z)$.
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $0 = Im(z)$.

Proposition 2 (Propriétés du conjugué).

Soit z et z' deux complexes, α et β deux réels.

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{\alpha \cdot z + \beta \cdot z'} = \alpha \cdot \bar{z} + \beta \cdot \bar{z}'$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$.
- $z - \bar{z} = 2i Im(z)$
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\bar{z}$.
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

On remarque que si $z = a + ib$ alors $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ est un réel positif.

Définition 3 (module).

Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z et on note $|z|$ l'unique réel positif tel que :

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

On a aussi de façon équivalente si $z = a + ib$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 3 (Propriétés du module).

Soit z et z' deux complexes et α un réel.

1. $|z| \geq 0$ et de plus $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
2. Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. $z = |z|$ si et seulement si z est un réel positif
6. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si z est réel.
7. $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ et il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si z est réel positif.

8. $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ et il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si z est un imaginaire pur.

9. **Inégalité triangulaire :**

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

De plus il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z = \lambda z' \quad \text{ou} \quad z' = \lambda z$$

Définition 4 (Exponentielle de $i\theta$).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Proposition 4 (Propriétés de l'exponentielle complexe).

Soit α et β deux réels

1. **Formules d'Euler.**

$$\cos \alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

2. $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

3. $e^{i\alpha} \neq 0$

4. $\overline{e^{i\alpha}} = \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$

5. Si $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$e^{i(\alpha+k2\pi)} = e^{i\alpha}$$

6. **Formule de Moivre.** Si $n \in \mathbb{N}$ alors $(e^{i\alpha})^n = e^{i n \alpha}$

Proposition 5 (Forme trigonométrique et exponentielle).

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Remarque : θ n'est défini qu'à 2π près.

Définition 5 (Argument).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, si z est de la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, on dit alors que θ est **un argument** de z .

Remarque : 0 n'a pas d'argument.

Proposition 6 (Égalité de deux nombres complexes sous forme exponentielle).

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même argument à 2π près et même module.

Soit $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ avec ρ_1 et ρ_2 positifs alors :

$$z = z' \text{ si et seulement si } \rho_1 = \rho_2 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 + 2k\pi$$

I.2 Applications à la trigonométrie.

Les formules et d'Euler permettent de retrouver les formules de trigonométrie classiques, il faut savoir les utiliser

Méthode : Linéarisation de $\cos(x)^p \sin(x)^q$

Pour écrire sous forme d'une somme ces quantités .

- On remplace $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en utilisant la formule d'Euler.
- On développe en utilisant les formules du binôme.
- En rassemble des termes e^{inx} et e^{-inx} pour faire apparaître des cosinus $\cos(nx)$ et des sinus $\sin(nx)$ grâce aux formules d'Euler.
- Ces formules sont utiles par exemple lorsque l'on veut intégrer des produit de sinus et de cosinus

Méthode : simplification de $\cos(px)$ ou $\sin(px)$

Pour écrire sous forme d'une somme ces quantités .

- On utilise la formule de Moivre .

$$\cos(px) = \operatorname{Re} \left((e^{ix})^p \right) \quad \sin(px) = \operatorname{Im} \left((e^{ix})^p \right)$$

- On remplace $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
- On développe en utilisant les formules du binôme.
- On identifie les parties réelles et imaginaires

Méthode résolution de $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$

Pour résoudre cette équation on commence par écrire

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varphi \right)$$

Puis on cherche un réel θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ce réel existe toujours mais n'a pas forcément une forme simple.

Et on s'est ramené à un équation du type

$$\cos(\varphi - \theta) = c'$$

II Polynômes

II.1 Des fonctions polynomiales aux polynômes

L'année dernière vous avez étudié les fonctions polynomiales réelles, c'est à dire les fonctions que l'on peut écrire sous la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Où les a_i sont des coefficients réels

Définition 6 (Notation X).

On note X la fonction définie sur \mathbb{R} telle que

$$X : x \mapsto x$$

Attention : X n'est pas une inconnue ni une variable, c'est l'**indéterminée**.

On peut alors écrire toute fonction polynomiale réelle sous la forme

$$\sum_{i=0}^n a_i X^i$$

ou même

$$\sum a_i X^i \quad \text{les } a_n \text{ sont nuls à partir d'un certain rang}$$

II.2 Polynômes à coefficients complexes

Définition 7 (Polynômes complexes).

Dans l'écriture précédente rien n'interdit de remplacer les coefficients par des complexes. Un **polynôme à coefficients complexes** s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i X^i \quad a_0, a_1, \dots, a_n \quad \text{complexes}$$

On peut aussi utiliser la notation :

$$\sum a_i X^i \text{ les } a_i \text{ sont des complexes nuls à partir d'un certain rang}$$

Définition 8 (Les ensembles $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{K}[X]$).

On note

1. L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \text{ des réels} \right\}$$

2. L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$:

$$\mathbb{C}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \text{ des complexes} \right\}$$

3. Si on n'a pas besoin de préciser l'ensemble auquel appartiennent les coefficients on utilise la notation $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : La notation $\mathbb{K}[X]$ n'apparaît pas dans le programme officiel. Dans vos sujets il sera précisé si on étudie des polynômes à coefficients réels ou complexes.

Vocabulaire

- les **scalaires** a_n sont les **coefficients**.
- X^i est le **monôme de degré** i .

Définition 9 (Polynôme nul).

Le **polynôme nul** est l'unique polynôme dont tous les coefficients sont nuls, on le note 0 ou $0_{\mathbb{R}[X]}$

Définition 10 (Degré).

Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} **non nul**

- Le degré de P est le plus grand entier n , tel que a_n est non nul.
- Le coefficient associé est le **coefficient dominant**.
- Le polynôme nul à pour degré $-\infty$.
- Un polynôme de degré 0 est **constant**.
- Un polynôme de coefficient dominant égal à un est dit **unitaire**.

Proposition 7 (Égalité de deux polynômes).

Soit $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$

- $P = 0$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- $P = Q$ si et seulement si

II.3 Propriétés

Définition 11 (Opérations).

On munit l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des opérations suivantes : Soit $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un réel ou un complexe.

1. **Addition**

$$P + Q = \sum (a_k + b_k) X^k$$

2. **Multipliation par un scalaire**

$$\lambda \cdot P = \sum \lambda a_k X^k$$

3. **Multipliation**

$$PQ = \sum c_k X^k \quad \text{où} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad c_k =$$

Démonstration :

Proposition 8 (Propriétés des opérations).

On admet que ces opérations ont les propriétés calculatoires usuelles (distributivité, associativité, commutativité)

On décide pour ce chapitre des conventions suivantes :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $-\infty < n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $-\infty + n = -\infty$.
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

Proposition 9 (Degré et opérations).

Soit $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire **non nul**

1.

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Il y a égalité **notamment** si $\deg(Q) \neq \deg(P)$

2.

$$\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$$

3.

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Définition 12 (Ensemble des polynômes de degré inférieur à n).

On note

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

Les notations $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$ sont des cas particuliers utilisées si on veut préciser quel cas on étudie.

On remarque que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire.

II.4 Autres opérations

Composée

Définition 13 (composée de deux polynômes).

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$.

Alors on définit la composée de P et Q par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$



Attention : A priori dans le cas général $P \circ Q \neq Q \circ P$

Remarque : Lorsque l'on écrit $P(X^2)$ cela revient à remplacer tous les X par des X^2



Proposition 10 (Degré d'une composée).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et Q non constant

$$\deg(P(Q)) =$$

Dérivation

Définition 14 (Dérivation).

Soit P un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.
On définit le polynôme dérivé de P par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

Proposition 11 (Propriétés de la dérivation).

Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et λ et μ deux scalaires. Alors :

1. Si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$
2. $(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)' = \lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'$
3. $(PQ)' = P'Q + Q'P$
4. $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$
5. $P' = 0$ si et seulement si P est un polynôme constant.
6. Si $P' = Q'$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = Q + \lambda$

Définition 15 (Dérivées successives).

Soit P un polynôme. On définit la dérivée n -ième de P que l'on note $P^{(n)}$ par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}$$

III Racines et factorisation

III.1 Racines

Définition 16 (Racine).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ on dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est **racine** de P si et seulement si

Théorème 1 (Racine et factorisation).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- α est racine de P .
- P s'écrit sous la forme $P = (X - \alpha)Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 12 (Extension à plusieurs racines distinctes).

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul et si $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sont des racines, distinctes deux à deux, de ce polynôme alors on peut trouver un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)Q$$

Théorème 2 (Principe d'identification).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

- Un polynôme non nul admet au maximum $\deg(P)$ racines distinctes.
- Si P est un polynôme qui admet strictement plus de racines que son degré alors P est nul
- Si P un polynôme tel que pour tout α réel $P(\alpha) = 0$, alors P est le polynôme nul, c'est à dire que tous ses coefficients sont nuls
- Si $P = \sum a_n X^n$ et $Q = \sum b_n X^n$ sont tels que pour une infinité de réels α , $P(\alpha) = Q(\alpha)$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$$

III.2 Racines multiples

Définition 17 (Racines multiples).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

On dit que α est racine de **multiplicité (exactement) m** si et seulement si il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)^m Q \quad Q(\alpha) \neq 0$$

Cela $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité n_α de P si on peut factoriser $(X - \alpha)^{n_\alpha}$ dans P mais que l'on ne peut pas factoriser $(X - \alpha)^{n_\alpha + 1}$

Proposition 13 (Caractérisation d'une racine multiple).

α est une racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

III.3 Factorisation

Théorème 3 (D'Alembert-Gauss).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ si P n'est pas constant alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$

Démonstration :

Admis (dur)

Attention : Ce théorème est faux dans $\mathbb{R}[X]$

III.3.a Dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 14 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$).

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et z_1, z_2, \dots, z_p des complexes tous distincts et n_1, \dots, n_p des entiers non nuls tels que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - z_i)^{n_i}$$

Dans ce cas là, les z_i sont alors les racines de P et n_i est la multiplicité de z_i

Démonstration :



On a très souvent besoin de ce lemme, à connaître et à savoir démontrer

III.3.b Dans $\mathbb{R}[X]$

lemme 1.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que tous les coefficients de P soient réels. On suppose que α est racine de P . Alors $\bar{\alpha}$ est racine de P de plus l'ordre de multiplicité de α et $\bar{\alpha}$ sont identiques.

Démonstration :



Proposition 15 (HP Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$).

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non nul alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, a_1, a_2, \dots, a_p des réels tous distincts; et n_1, \dots, n_p des entiers naturels non nuls et P_1, \dots, P_r des polynômes de degré 2 sans racines et des entiers naturels non nuls $m_1 \dots m_r$ tels que

$$P = \lambda \left[\prod_{i=1}^p (X - z_i)^{n_i} \right] P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_r^{m_r}$$

Les z_i sont alors les racines de P et les n_i les multiplicités des z_i

Exemple : Factorisez X^3 , $X^3 + X^2 + X + 1$, $X^4 + 2X^2 + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

III.3.c HP Cas général du procédé d'indentification

Proposition 16 (Nombre maximum de racine).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul alors le nombre de racines comptées avec leur multiplicité est inférieur au degré de P . Dans le cas de $\mathbb{C}[X]$ il y a égalité.

Démonstration :
Cela découle rapidement de la factorisation d'un polynôme



IV Résultats classiques qui ne sont pas au programme



Attention : Les résultats suivants ne peuvent pas être utilisés directement, dans le programme officiel ils sont décrits comme "ne sont pas des attendus du programme"

IV.1 Racines de l'unité

Soit n un entier naturel non nul, on cherche à résoudre dans \mathbb{C} , l'équation :

$$z^n = 1 \tag{E.1}$$

On cherche z sous la forme exponentielle *i.e.* $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^n \\ &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} && \text{à l'aide de la formule de Moivre} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = k \frac{2\pi}{n} \end{cases} && \text{car } \rho \text{ est un réel positif} \end{aligned}$$

Comptons le nombre de solutions différentes.

$$\left\{ e^{i \cdot k \frac{2\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Soit ω une solution, et soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = e^{i k \frac{2\pi}{n}}$. On effectue la division euclidienne de k par n , alors on trouve q et r deux entiers qui vérifient :

$$k = q \cdot n + r \quad 0 \leq r < n$$

Donc :

$$e^{i k \frac{2\pi}{n}} = e^{i r \frac{2\pi}{n}}$$

Toutes les solutions sont de la forme

$$e^{i r \frac{2\pi}{n}} \quad r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Ces complexes sont tous différents.

On effectue soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que

$$e^{i k \frac{2\pi}{n}} = e^{i \ell \frac{2\pi}{n}}$$

alors

$$k \frac{2\pi}{n} \equiv \ell \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$k \frac{2\pi}{n} = \ell \frac{2\pi}{n} + m2\pi$$

et donc on obtient :

$$k - \ell = mn$$

or

$$0 \leq k \leq n-1 \quad 0 \leq \ell \leq n-1$$

et donc

$$1 - n \leq k - \ell \leq n - 1$$

donc

$$1 - n \leq mn \leq n - 1$$

ce qui montre ¹

$$m = 0$$

et finalement

$$k = \ell$$

Résultat à utiliser directement

Proposition 17 (Racines n -ième de l'unité).

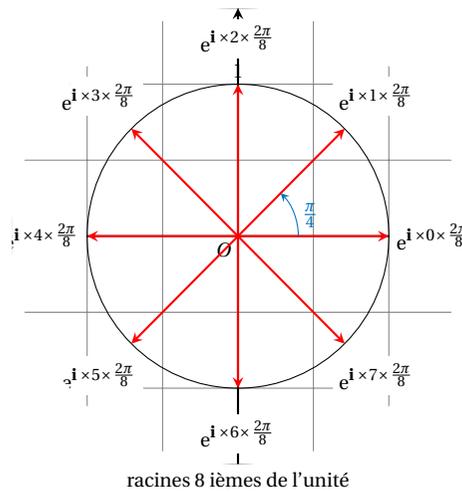
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation :

$$z^n = 1$$

admet exactement n racines distinctes qui sont

$$\left\{ e^{i \cdot k \frac{2\pi}{n}} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Ce sont les **racines n -ièmes de l'unité**.



1. en faisant une démonstration par l'absurde

Annexe : formules de trigonométrie

Proposition 18 (Formules d'addition).

Soit α et β des réels tels que les quantités suivantes soient définies. Alors

1. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
4. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
5. $^*\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
6. $^*\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

Proposition 19 (Formule de factorisation).

Soit α et β des réels

1. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
2. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
3. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
4. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

Proposition 20 (Formules de l'arc moitié).

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$; on pose $t = \tan \frac{\alpha}{2}$.

Alors :

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Si de plus $t \neq \pm 1$

$$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$