Complexes et polynômes

Complexes et trigonométrie

Exercice 1.
Calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres suivants :

1. $\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathbf{i}}$
2. $\dfrac{1+2\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}$
3. $\dfrac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}+1}$
4. $(1+\mathbf{i})^3$

Exercice 2.
Mettre sous forme trigonométrique ou exponentielle :

1. $1+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$
2. $1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$
3. $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta'}$
4. $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta'}$

Exercice 3.
Pour $z=a+\mathbf{i}\,b$ un nombre complexe, on pose :

$$\exp(z)=\exp(a)\exp(\mathbf{i}\,b)$$

1. calculer $|\exp(z)|$ et $\arg(\exp(z))$
2. Montrer que cette définition respecte les propriétés « classiques » de l'exponentielle.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z=\mathbf{i}$

Exercice 4.
Exprimer en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

1. $\cos(3x)$
2. $\sin(3x)$
3. $\cos(5x)$
4. $\sin(6x)$

Exercice 5.
Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos(x)\sin(x)$
2. $\cos^3(x)\sin^3(x)$
3. $\sin^4(x)$
4. $\cos^4(x)$

Puis calculer l'intégrale entre 0 et $\pi/2$ de l'expression donnée.

Exercice 6.
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$; on pose :

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos((n-1)x)+\cos(nx)$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin((n-1)x)+\sin(nx)$$

1. Calculer $S_1+\mathbf{i}\,S_2$. En déduire S_1 et S_2.
2. Si $x\not\equiv 0[2\pi]$ retrouver le résultat précédent en calculant $\sin(x/2)S_1$ et $\sin(x/2)S_2$.

Exercice 7.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ $\quad z_k=\mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}\,k\pi}{n}}$. Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose :

$$S_p=z_0^p+z_1^p+\cdots+z_{n-2}^p+z_{n-1}^p=\sum_{k=0}^{n-1}z_k^p.$$

Calculer S_p.

Exercice 8.
Soit $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, et $n\in\mathbb{N}$. Calculer

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx+y)$$

Exercice 9.
Le but de cet exercice est de calculer $s=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $c=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Calculer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ en fonction de c et s
2. Montrer que c est solution de l'équation $4x^2-2x-1=0$.
3. En déduire une valeur de c et de s.

Exercice 10 (Équations trigonométriques)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\cos(x)=1/2$
2. $\sin(x)=1$
3. $\tan(x)=\sqrt{3}$
4. $\cos(2x)=\dfrac{1}{2}$
5. $\sin(x+1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos(x)+\sin(x)=0$
7. $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=1$
8. $\sqrt{3}\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{3}$

Exercice 11 (Équations trigonométriques)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\tan(x)+\tan(2x)=\tan(3x)$
2. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$

Exercice 12.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on note

$$\omega_0=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\,2\pi/n}\qquad U_n=\left\{\omega_0^k\Big/k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

1. Montrer que si $z\in\mathbb{U}_n$ alors $z^k\in\mathbb{U}_n$ et $\overline{z}\in\mathbb{U}_n$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{z\in\mathbb{U}_n}z$ et $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|$

Polynômes

Définitions

Exercice 13.
Calculer le degré et le coefficient dominant de :

1. $X^3-3iX+X(X-2+i)^2$

2. $(X-2)^n-(X+1)^n$
3. $\prod_{k=0}^{n}(X^k-2^k)$

Exercice 14.
Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$

$$P(X^2)=X^2P$$

On commencera par trouver une condition nécessaire sur le degré d'une solution.

Exercice 15 (▲).
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n=\frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1}-(X-i)^{2n+1}\right]$$

Montrer que $P_n\in\mathbb{R}[X]$, calculer son degré, son coefficient dominant.

Exercice 16.
En calculant de deux façons les coefficients du polynôme $(X+1)^{n+m}$ montrer que :

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}$

Exercice 17.
Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

1. X^2+1
2. X^4+2X^2+1
3. X^4-X^2
4. $X^4+\mathbf{i}$
5. X^3+X^2+2X+2 on commencera par chercher une racine évidente

Exercice 18 (Exemple de racines nièmes et factorisation)**.**
En écrivant les membre de gauche et de droite sous forme exponentielle, résoudre les équations suivantes, représenter les solutions dans le plan complexe

1. $z^4=1$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^4-1
2. $z^5=\mathbf{i}$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^5-\mathbf{i}$
3. $z^3=1$ puis factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^3-1

Exercice 19.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^6-2X^3+1=0$ On commencera par utiliser une identité remarquable.
2. En déduire une factorisation de X^6-2X^3+1
3. Faire de même avec l'équation $x^6+2X^3+1=0$ et le polynôme X^6+2X+1

Exercice 20 (polynômes pairs/impairs)**.**
On dit qu'un polynôme P est pair si et seulement si $P(-X)=P(X)$ et qu'il est impair si et seulement si $P(-X)=-P(X)$. On note $P=\sum a_nX^n$

1. Montrer que P est pair si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{2n+1}=0$
2. Trouver une CNS similaire pour P impair.

Exercice 21 (▲▲).
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes

$$P_n=X^{2n}-1\qquad I_n=X^{2n+1}-1$$

puis trouver les factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 22 (▲).
On note $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$. Montrer que ces polynômes n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$

Exercice 23 (▲ relations coefficients/racines).
Soit $=X^3+aX^2+bX+c$ on suppose que P admet dans $\mathbb{C}$ trois racines x_1, x_2, x_3.

1. Exprimer a, b et c en fonction des racines.
2. Se servir de ce résultat pour résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants.

(a)
$$\begin{cases} xyz=-1\\ xy+yz+xz=-2\\ x+y+z=2\end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} xyz=2\\ xy+yz+xz=-1\\ x+y+z=-2\end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} xyz=6\\ x+y+z=-4\\ x^2+y^2+z^2=14\end{cases}$$

Pour aller plus loin

Exercice 24.
On considère le polynôme $P=X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1$

1. Trouver les racines de P dans $\mathbb{C}$ (*penser à l'exercice 18*).
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$
3. Montrer que pour $k\in[\![0,n]\!]$

$$\sin\frac{k\pi}{n}=-\frac{e^{-\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}}{2i}\left(1-e^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}\right)$$

   en déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

4. Trouver une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 25 (Expression de la dérivée $n$ième)**.**
Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$ on note

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Soit $P=\sum a_kX^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que pour $\ell\in\mathbb{N}$

$$P^{(\ell)}=\sum_{k\geqslant\ell}A_k^\ell a_kX^{k-\ell}$$

Exercice 26 (Valuation)**.**
Soit $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul. On nomme valuation de P et on note $\mathrm{val}(P)$ le plus petit entier tel que $a_k\neq0$.

1. Que va-t-on choisir comme valuation du polynôme nul ?
2. Montrer que $\mathrm{val}(P+Q)\geqslant\min(\mathrm{val}(P),\mathrm{val}(Q))$. Donner un cas d'égalité.
3. Montrer que $\mathrm{val}(PQ)=\mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)$