

## CONCEPTS DE BASES EN PROBABILITÉS

### Généralités

### Commandes python

Dans le module `random` que l'on importe avec l'alias `rd`, on trouve

- `rd.random()` renvoie un réel, choisi au hasard et uniformément, dans l'intervalle  $[0; 1[$ .
- `rd.randint(a, b)` renvoie un entier, choisi au hasard et uniformément, dans l'intervalle  $\llbracket a, b \rrbracket$ .
- `rd.randrange(a, b)` renvoie un entier, choisi au hasard et uniformément, dans l'intervalle  $\llbracket a, b - 1 \rrbracket$ , les arguments suivent la même convention que ceux de la commande `range`.

Ce sont les fonctions présentées dans le formulaire de l'oral agro-véto, il existe d'autres fonctions dans le module `numpy.random` avec des syntaxes un peu différentes.

#### Exercice 1.

Soient  $A, B, C$  trois événements liés à une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . Décrire à l'aide de  $A, B, C$  les événements suivants

1.  $E_1 = \llcorner \text{seul } A \text{ se réalise} \llcorner$ .
2.  $E_2 = \llcorner A \text{ ne se réalise pas} \llcorner$ .
3.  $E_3 = \llcorner B \text{ se réalise ou } C \text{ se réalise} \llcorner$ .
4.  $E_4 = \llcorner \text{Soit } B \text{ se réalise, soit } C \text{ se réalise mais pas les deux} \llcorner$ .
5.  $E_5 = \llcorner A \text{ et } B \text{ se réalisent mais pas } C \llcorner$ .
6.  $E_6 = \llcorner \text{Deux événements au plus se réalisent} \llcorner$ .
7.  $E_7 = \llcorner \text{Deux événements ou plus se réalisent} \llcorner$ .

#### Exercice 2.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable et  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille d'événements.

Écrire à l'aide d'union et d'intersection les événements suivants :

1. « Tous les événements se réalisent à partir du rang  $n_0$  »
2. « Tous les événements se réalisent à partir d'un certain rang »
3. « Seul un nombre fini d'événements se réalisent ».

Indication : Une propriété  $\mathcal{H}_n$  est vraie pour un nombre fini d'entiers  $n$  si et seulement si, elle est fautive à partir d'un certain rang.

4. « Un nombre infini d'événements se réalisent »

#### Exercice 3 (Opérations sur les tribus $\blacktriangle$ ).

Soit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux tribus sur l'univers  $\Omega$ . Montrer que  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  est une tribu. Est-ce le cas de  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  ?

#### Exercice 4 (Formule de Poincaré $\blacktriangle \blacktriangle$ ).

Soient  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements

le but de cet exercice est de démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) \right)$$

1. Écrire sous forme développée le cas  $n = 2$
2. Écrire le cas  $n = 3$  et le démontrer, faire de même pour  $n = 4$ .
3. Démontrer le résultat par récurrence sur  $n$ . On commencera par remarquer que

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1}$$

#### Exercice 5 ( $\blacktriangle$ Deux conditionnements).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$ . On note  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_A$ . Montrer que

$$\mathbb{P}'_B = \mathbb{P}_{A \cap B}$$

### Espaces probabilisés finis

#### Exercice 6.

On pioche successivement et sans remise 4 cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. Dans cet ordre : 2 trèfles puis 2 cœurs.
2. Sans ordre : 2 trèfles et 2 cœurs.

#### Exercice 7.

On lance successivement 7 fois un même dé à 20 faces (que l'on suppose équilibré). Calculer la probabilité pour que :

1. Toutes les faces portent un numéro distinct.
2. Toutes les faces portent un numéro identique.
3.  $\blacktriangle$  Écrire des fonctions python qui simulent ces expériences. À chaque fois la fonction renvoie `True` si l'événement est réalisé et `False` sinon. Vous ne devez pas utiliser les calculs précédents, mais uniquement la description de l'événement.
4. En utilisant les fonctions précédentes, écrire un programme qui réalise  $N$  expériences et qui calcule la fréquence de fois où l'événement décrit a été réalisé.

#### Exercice 8.

Une urne  $U_1$  contient 3 boules blanches et 5 boules noires. Une urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire simultanément 2 boules dans l'urne choisie.

1. Calculer la probabilité d'avoir deux billes de la même couleur
2. On obtient une boule noire, quelle est la probabilité d'avoir choisit l'urne 1?

### Exercice 9.

Soit un jeu de 32 cartes, on distribue 5 cartes (simultanément) à  $X$  et à  $Y$

1. Probabilité pour que  $X$  ait au moins un as
2.  $Y$  a exactement un as dans son jeu, quelle est pour lui la probabilité pour que  $X$  ait au moins un as

### Exercice 10 (Deuxième chance $\blacktriangle$ ).

Lors d'un jeu on demande au joueur de choisir parmi 3 enveloppes, dans l'une d'elles, on trouve un lot, les autres sont vides.

Le candidat choisit une enveloppe mais ne l'ouvre pas. Puis l'animateur ouvre une enveloppe vide (qui n'est pas celle qui qu'a choisie le candidat). Il reste donc 2 enveloppes fermées : celle que le candidat a choisi et une autre. Le candidat a alors le choix entre garder son premier choix et changer. Qu'a-t-il intérêt à faire?

### Exercice 11.

On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4)  $n$  fois de suite. On note  $p_n$  la probabilité que les quatre chiffres (1, 2, 3, 4) apparaissent au moins une fois lors des  $n$  lancers.

Pour tout nombre entier  $i \in \{1; \dots; 4\}$ , on pose :

$$A_i = \{\text{le numéro } i \text{ n'apparaît pas durant les } n \text{ tirages}\}$$

1. Calculer  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ .
2. En déduire que  $p_n = 1 - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6 \left(\frac{2}{4}\right)^n - 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.
4.  $\blacktriangle$  Écrire une fonction python qui simule le lancers des  $n$  dés et qui renvoie `True` si l'événement "les quatre chiffres (1, 2, 3, 4) apparaissent au moins une fois lors des  $n$  lancers" est réalisé et `False` sinon. Vous ne devez pas utiliser les calculs précédents, mais uniquement la description de l'événement.
5. En utilisant les fonctions précédentes, écrire un programme qui réalise  $N$  expériences et qui calcule la fréquence de fois où l'événement décrit a été réalisé.

### Exercice 12 (Loi de Hardy-Weinberg).

Un gène présent dans une population est formé de 2 allèles  $A$  et  $a$ . Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants :  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$ . Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi si le père est du type  $AA$  et la mère de type  $Aa$ , les enfants peuvent être du type  $AA$  ou  $Aa$ . On considère une population (génération 0) et on note  $p_0$ ,  $q_0$  et  $r_0$  les proportions respectives de chacun des phénotypes  $AA$ ,  $Aa$  et  $aa$ . On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner, en fonction de  $p_0$ ,  $q_0$  et  $r_0$  la probabilité  $p_1$  qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype  $AA$ .
2. Donner de même  $r_1$ , puis  $q_1$ .

3. Démontrer que  $p_1$ ,  $q_1$  et  $r_1$  s'expriment uniquement en fonction de  $\alpha = p_0 - r_0$ . Que peut-on dire de  $p_1 - r_1$ .
4. Donner les probabilités  $p_2$ ,  $q_2$  et  $r_2$  qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement  $AA$ ,  $Aa$  et  $aa$ . Que peut-on conclure?

## Espaces probabilisés infinis

### Exercice 13.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Quelle est la probabilité que l'on fasse exactement  $n$  lancers?
2. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs?
3. Écrire une fonction python simule cette expérience et qui renvoie `True` si tous les numéros sont pairs `False` sinon.

### Exercice 14.

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir  $n$  vaut  $1/2^n$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement «  $n$  est un multiple de  $k$  ».

1. Vérifier que ceci définit une probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .
2. Calculer la probabilité de  $A_k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
3. Calculer la probabilité de  $A_2 \cup A_3$ .
4. Montrer que alors  $A_2$  et  $A_4$  ne sont pas indépendants.

### Exercice 15.

Des joueurs  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité  $\frac{1}{2}$  de gagner. La première manche oppose  $A_1$  et  $A_2$  et, à l'étape  $n$ , si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur  $A_{n+1}$ . Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. On note  $E_n$  « l'étape  $n$  a bien lieu ». Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$  donner  $\mathbb{P}_{E_{n-1}}(E_n)$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(E_n)$
3. On note  $S_n$  l'événement « le jeu s'arrête à l'issue de l'étape  $n$  ». Que vaut  $\mathbb{P}(S_1)$ ?
4. En remarquant que  $S_n = E_n \setminus E_{n+1}$ , calculer  $\mathbb{P}(S_n)$
5. En déduire que la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle.
6. Quelle est la probabilité que le joueur  $A_n$  gagne le jeu (c'est à dire deux manches successives)?

### Exercice 16 (Tirages dans une urne bicolore).

Une urne contient  $a$  billes noires et  $b$  billes blanches. On retire une bille puis on la remet et on recommence cette opération une infinité de fois.

On note  $B_i$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , l'événement « Le lancer  $i$  amène une bille blanche ».

#### 1. Obtention de la première bille blanche

On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  : « le premier tirage qui amène une bille blanche est  $n$  »

- (a) Écrire  $A_n$  en fonction des  $B_i$ .
- (b) Calculer la probabilité de  $A_n$

## 2. Obtention d'une bille blanche

On note  $B$  l'événement : « On obtient au moins une bille blanche »

- Écrire  $B$  en fonction des  $A_n$ .
- En déduire, rigoureusement, que  $\mathbb{P}(B) = 1$ .
- Comment appelle-t-on un tel événement ?

## 3. Obtention d'une bille blanche : autre approche

- Écrire  $\bar{B}$  en fonction des  $A_n$ .  
On admet que si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n E_i \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \right)$$

- En déduire que  $\mathbb{P}(B) = 1$ .

## 4. Obtention du premier B à un rang pair

On note  $C$  : « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang pair »,  $D$  : « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang multiple de 3 » et  $F$  : « on obtient une bille blanche pour la première fois à un rang multiple de 6 »

- Écrire  $C, D$  et  $F$  à l'aide des  $A_n$ .
- En déduire la probabilité de  $C, D$  et  $F$
- Ces trois événements sont-ils indépendants ?

## Exercice 17 ( Urnes de Polya $\blacktriangle$ ).

Exemple type de tirage successifs dans des urnes modifiées à chaque étape

On dispose d'une urne contenant  $a$  billes rouges et  $b$  bille blanches.  $c$  représente un entier naturel non nul.

On retire une bille de l'urne, on note sa couleur on la remet dans l'urne et on rajoute  $c$  billes de la couleur de celle qui a été tirée.

- Écrire une fonction python dont les arguments sont  $a, b, c$  et qui renvoie le rang d'apparition de la première boule blanche.
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $r_n$  la probabilité d'obtenir la première bille blanche au rang  $n$ . Calculer  $r_n$  (utiliser le théorème des probabilités composées, après avoir introduit des événements de "base", et écrit de façon ensembliste l'événement dont on cherche la probabilité).
- On note, pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_m$  les  $m$  premiers tirages sont des billes rouges.
  - Cet événement est-il le même que celui étudié dans la question précédente ?
  - Calculer  $\mathbb{P}(C_m)$
  - Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\mathbb{P}(C_n))$  (on écrira  $\ln \mathbb{P}(C_n)$  sous forme d'une somme et on utilisera les théorème de comparaison sur les séries).
  - On admet que si  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événement telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} \subset V_n$$

alors

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n)$$

En déduire la probabilité de  $C$  « On obtient que des billes rouges »

- Déduire de la question précédente, et sans calculs, que  $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = 1$

## Exercice 18 (Apparition du premier double Pile $\blacktriangle$ ).

On lance une infinité de fois une pièce non truquée, et on cherche à connaître le rang du premier double Pile.

Par exemple si ls suite de tirage est PFPFFPPPF... le résultat est 6. Si la suite de tirage donne FFFPFFPFF... le résultat est 7.

On note  $A_i$  l'événement "le tirage  $i$  donne Pile" et  $r_n$  la probabilité que lors d'une suite de tirage le rang du premier double Pile soit  $n$

- Écrire une fonction python `double_pile()` qui simule l'expérience précédent, elle doit renvoyer le rang d'apparition du premier double pile.
- calculer  $r_1, r_2$ .
- Calculer  $r_3$  (on envisagera les différentes possibilités sur les 2 premiers tirages).
- En étudiant le premier tirage, montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$r_{n+2} = \frac{1}{2}r_{n+1} + \frac{1}{4}r_n$$

- Peut-on calculer la probabilité d'obtenir un double Pile au moins une fois lors de la suite de tirages? (On ne cherchera pas à calculer l'expression de  $r_n$ , mais on "sommera l'égalité précédente)

## Chaînes de Markov

### Exercice 19 (Transmission d'une information).

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité  $p$ , l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité  $1 - p$ , l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note  $p_n$  la probabilité que l'information après  $n$  transmissions soit correcte.

- Donner une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
- En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $p$  et de  $n$ .
- En déduire la valeur de  $\lim_n p_n$ . Qu'en pensez-vous ?

### Exercice 20 (Déplacement sur un segment $\blacktriangle \blacktriangle$ ).

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse  $a$  ( $a$  entier), sur un segment gradué de 0 à  $N$  (on suppose donc  $0 \leq a \leq N$ ). A chaque instant, elle fait un bond de  $+1$  avec la probabilité  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ), ou un bond de  $-1$  avec la probabilité  $q = 1 - p$ . Autrement dit, si  $x_n$  est l'abscisse de la particule à l'instant  $n$ , on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe  $x_n$  avec  $x_n = 0$  ou  $x_n = N$ ).

1. Écrire une fonction python qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cette fonction prendra en entrée l'abscisse  $a$  de départ, la longueur  $N$  du segment, et le paramètre  $p$  et retournera 0 ou  $N$  en fonction du point d'arrêt, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête.
2. On note  $u_a$  la probabilité pour que la particule partant de  $a$ , le processus s'arrête en 0.
  - (a) Que vaut  $u_0$ ?  $u_N$ ?
  - (b) Montrer que si  $0 < a < N$ , alors  $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$ . On pourra utiliser le SCE  $G_1, D_1$  où  $D_1$  : " le premier déplacement se fait à droite ".
  - (c) En déduire l'expression exacte de  $u_a$ .
3. On note  $v_a$  la probabilité pour que la particule partant de  $a$ , le processus s'arrête en  $N$ . Reprendre les questions précédentes avec  $v_a$  au lieu de  $u_a$ .
4. Calculer  $u_a + v_a$ . Qu'en déduisez-vous?

## Autres

### Exercice 21.

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire au hasard successivement et sans remise 5 cartes.

1. Quel  $\Omega$  choisir?
2. Calculer les probabilités d'obtenir
  - (a) Une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent).
  - (b) Un carré (4 cartes de même valeur)
  - (c) un Full (trois cartes de même valeurs et deux autres de même valeur)

### Exercice 22.

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire 2 boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, on tire la deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la deuxième boule.

### Exercice 23.

On lance un dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents?

### Exercice 24 ( Le problème du chevalier de Méré).

On jette un dé  $n$  fois de suite.

1. Calculer la probabilité  $p_n$  d'obtenir 6 au moins une fois. Numériquement, calculer  $p_4$ .
2. Trouver  $n$  tel que  $(p)^n \geq \frac{1}{2}$ .