DM 06 vad

BCPST Spé 2

Réponse

I Caractéristique d'une loi géométrique

Dans cette partie uniquement on suppose que U est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[)$

1. Calculer, pour $m \in \mathbb{N}$, $P(U > m)$

RÉPONSE:

Attention : C'est un calcul classique à savoir faire

Par le calcul Soit $m \in_N$

$$\begin{aligned}
P(U>m) &= P\left(\bigcup_{i=m+1}^{+\infty}[U=i]\right) \\
&= \sum_{i=m+1}^{+\infty} P(U=i) && \text{union disjointe} \\
&= \sum_{i=m+1}^{+\infty} pq^{i-1} && \text{en posant } q=1-p \\
&= p\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+m} && \text{en posant } k=i-m-1 \\
&= pq^m\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^m\frac{1}{1-q} \\
&= q^m
\end{aligned}$$

En utilisant l'expérience sous-jacente Si on connaît l'expérience qui donne naissance à cette loi.On pose E_i "l'expérience i est un échec" et S_i "l'expérience i est un succès"

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad [U=m] = S_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \qquad [U>m] = \bigcap_{i=1}^{m} E_i$$

Donc par indépendance

$$P(U > m) = (1-p)^m$$

$$\boxed{\text{Pour } m \in \mathbb{N} \qquad P(U > m) = (1-p)^m}$$

Le résultat est correct pour $m = 0$

❀

2. Montrer que U vérifie

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad P_{(U>m)}(U > n+m) = P(U > n)$$

Soit M et n deux entiers naturels

$$\begin{aligned} P_{(U>m)}(X > n+m) &= \frac{P\left([U > m] \cap [U > m+n]\right)}{P(U > m)} && \text{définition d'une proba conditionnelle, dénominateur non nul} \\ &= \frac{P\left(U > m+n\right)}{P(U > m)} && \text{car } [U > m+n] \subset [U > m] \text{inclusion} \\ &= \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n \\ &= P(U > n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad P_{(U>m)}(U > n+m) = P(U > n)}$$

II Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geqslant m) > 0$.
On suppose également que X vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n)$$

On pose $P(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1 - p$. Montrer que $P(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.

<u>RÉPONSE</u>:

$$P(X = 0) + P(X \geqslant 1) = 1$$

Car ces deux événements forment un système complet d'événements donc

$$\boxed{P(X \geqslant 1) = q}$$

Comme $p > 0$, on a $q < 1$ et d'après l'hypothèses $P(X \geqslant 1) > 0$

$$\boxed{q \in]0;1[}$$

❀

2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)$.

RÉPONSE:

Soit n et ù des entiers naturels, on sait d'après l'énoncé

$$P_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n)$$

donc

$$\frac{P([X \geqslant n+m)] \cap [X \geqslant m]}{P(X \geqslant m)} = P(X \geqslant n)$$

comme $[X \geqslant n+m)] \subset [X \geqslant m]$, on a $[X \geqslant n+m)] \cap [X \geqslant m] = [X \geqslant n+m)]$ et donc

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)}$$

❀

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.

RÉPONSE:

Soit n entier naturel

$$P(X \geqslant n+1) = P(X \geqslant 1)P(X \geqslant 1)$$

et donc

$$u_{n+1} = q u_n$$

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } q.}$$

❀

(b) Pour tout n de N, exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

RÉPONSE:

$u_0 = P(X \geqslant 0) = 1$, donc

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}\ P(X \geqslant n) = q^n}$$

❀

(c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)$.

RÉPONSE:

Soit n entier naturel, on a l'union disjointe

$$[X \geqslant n] = [X = n] \cup [X > n]$$

Comme X ne prend que des valeurs dans $\mathbb{N}$ $[X > n] = [X \geqslant n+1]$
donc

$$P(X \geqslant n) = P(X = n) + P(X \geqslant n+1)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)}$$

❀

(d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X = n) = q^n p$.

RÉPONSE:

Soit n entier naturel

$$\begin{aligned} P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) \\ &= q^n - q^{n+1} \\ &= q^n(1-q) \\ &= pq^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a } P(X = n) = q^n p.}$$

❀

4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X+1$.

RÉPONSE:

Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, $X+1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X+1=k) = P(X=k-1) = pq^{k-1}$$

$$\boxed{X+1 \text{ suit une loi géométrique}}$$

❀

(b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

RÉPONSE:

D'après les résultats du cours

$$E(X+1) = \frac{1}{p} \qquad V(X+1) = \frac{q}{p^2}$$

Comme de plus

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} - 1 \qquad V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

❀

III Facultatif : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y = n)$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geqslant n)}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_n = \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y = n) & \\
= \frac{P([Y \geqslant n] \cap [Y = n])}{P(Y \geqslant n)} & \\
= \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} & \qquad \text{car } [Y = n] \subset [Y \geqslant n]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)}.}$$

❀

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
1 - \lambda_n = 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} & \\
= \frac{P(Y \geqslant n)}{P(Y \geqslant n)} - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} & \\
= \frac{P(Y \geqslant n) - P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} & \qquad \text{résultat précédent} \\
= \frac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)} & \qquad \text{car } Y \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}.}$$

❀

(c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda_n < 1$.

RÉPONSE:

Soit n un entier naturel λ_n étant par définition une probabilité elle est positive. De plus $1 - \lambda_n$ est un quotient de probabilités strictement positives ce qui démontre

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \lambda_n < 1.}$$

Je ne pense pas que l'on puisse montrer que λ_n est strictement positif

❀

(d) Montrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$$

RÉPONSE:

Initialisation Pour $n = 1$

$$\prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k) = 1-\lambda_0 = \frac{P(Y \geqslant 1)}{P(Y \geqslant 0})$$

et comme $Y(\Omega) = 1$, $P(Y \geqslant 0) = 1$ on obtient

$$P(Y \geqslant 1) = \prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k)$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que

$$P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1-1}(1-\lambda_k) &= \left[\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right](1-\lambda_n) \\ &= P(Y \geqslant n)\frac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)} && \text{D'après la question b} \\ &= P(Y \geqslant n+1)\end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)}$$

❀

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $[Y \geqslant n]$, $[Y = 0]$, $[Y = 1]$, ..., $[Y = n-1]$ forment un système complet d'événeneents

$$P(Y \geqslant n) + \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1$$

ce qui démontre

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geqslant n)}$$

❀

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0$.

RÉPONSE:

On sait que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} P(Y = k)$ est convergente (de somme totale égale) à 1 car $([Y = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans le résultat précédent

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0}$$

❀

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le résultat de la question 1d

$$-\ln(P(Y \geqslant n)) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\lambda_k)$$

En utilisant le résultat de la question précédente et les limites classiques de ln

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(P(Y \geqslant 1)\right) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty}$$

❀

(d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

RÉPONSE:

Si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum \lambda_n$ diverge.
Si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors comme $\ln(1+x) \sim_0 x$

$$-\ln(1-\lambda_n) \sim_{n\to+\infty} \lambda_n$$

Ces deux suites étant à termes positifs, les séries associées sont de même nature donc $\sum \lambda_n$ diverge
Dans les deux cas on a montré :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \lambda_n \text{ diverge.}}$$

❀

3. (a) Écrire une fonction récursive `f(n)` qui renvoie la valeur de $n!$

RÉPONSE:

```
def f(n):
        '''renvoie n!'''
        if n==0:
                r=1
        else:
                r=n*f(n-1)
        return r
```

❀

(b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```
def g(a,n):
        if n==0 :
                return 1
        else:
                return a*g(a,n-1)
```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de $g(a,n)$.

RÉPONSE:

Cette fonction renvoie a^n pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{N}$

❀

(c) Proposer une fonction utilisant ces deux fonctions et le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

RÉPONSE:

```
import math as m
def somme(n,a):
        s=0
        for i in range(n):
                s+=g(a,i)/f(i)
        return s*m.exp(-a)
```

❀

(d) Proposer une fonction qui à l'aide du résultat de la question 1a) de cette partie calcul le taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, lorsque n et a sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera $n \geqslant 1$).

RÉPONSE:

```
def taux(n,a):
        return m.exp(-a)*g(a,n)/((1-somme(n+1,a))*f(n))
```

❀

(e) Compléter la déclaration de fonction suivante pour, qu'elle renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ à l'appel de *sigma(a,n)*.

RÉPONSE:

On constate que la fonction précédente fait trop de calculs, en effet on calcule les factorielles et les puissances successives indépendamment les une des autres alors que pour n entier on

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad a^{n+1} = aa^n$$

```
def sigma(a,n):
        p=1
        s=1
        for k in range(1,n):
                p=p*a/k
                s=s+p
return s*m.exp(-a)
```

❀

IV Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 2.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{P(X=n)}{P(X \geqslant n)} && \text{1a} \\ &= \frac{q^n p}{q^n} && \text{1b,1d} \\ &= p \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le taux de panne de } X \text{ est constant égal à } p}$

❀

2. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.

   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

RÉPONSE:

Comme λ est une probabilité (conditionnelle)

$$\lambda \in [0; 1]$$

On peut aussi démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_n = \lambda = \frac{P(Z = n)}{P(Z \geqslant n)}$$

Si $\lambda = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(Z = n) = 0$$

ce qui est impossible et si $\lambda = 1$ alors

$$P(Z = n) = P(Z \geqslant n)$$

ce qui démontre $P(Z \geqslant n+1) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse

$$\boxed{\lambda \in]0; 1[}$$

❀

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geqslant n)$ en fonction de λ et n.

RÉPONSE:

On sait que d'après III.1.d et en utilisant le taux de panne constant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\lambda) = (1-\lambda)^n$$

Cette formule est aussi valable pour $n = 0$
Et comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(Z = n) = P(Z \geqslant n) - P(Z \geqslant n+1)$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \qquad P(Z = n) = \lambda(1-\lambda)^n}$$

❀

(c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.

RÉPONSE:

On a démontré la première implication dans la question 1 de cette partie et la deuxième implication dans la question précédente

❀