Correction DL mathématiques n°06

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y

RÉPONSE:

Si $n = 1$ alors le premier tirage donne quasi-certainement 1, donc on effectue un seul tirage dans la deuxième urne. On reconnaît une expérience de Bernoulli

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)}$$

❀

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Le tirage étant honnête

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket 1, n \rrbracket\right) \qquad E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

❀

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$

RÉPONSE:

Si on suppose l'événement $[X = k]$ réalisé[1] alors on effectue k tirages avec remise dans l'urne 2. On reconnaît un schéma binomial car on compte le nombre de succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, le succès est « obtenir une boule blanche » dont la probabilité est p.
On sait aussi que dans ce cas là on ne peut pas avoir plus de succès que les k épreuves.
On posant $q = 1 - p$

$$\boxed{\text{Pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et pour } i \llbracket 0, n \rrbracket \; P_{X=k}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Il faut bien donner un résultat sous cette forme, y compris les cas où la probabilité est nulle car le support de Y est $\llbracket 0, n \rrbracket$.

❀

4. On rappelle les commandes fonctions suivantes, présentes dans le module `random` qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

   - `randint(a,b)` Simule une réalisation d'une variable suivant la loi $\mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$
   - `binomialvariate(n, p)` Simule une réalisation d'une variable suivant la loi $\mathscr{B}(n,\ p)$

   Écrire une fonction en python qui permet de simuler les variables X et Y.

RÉPONSE:

```
import random as rd
def simul(n,p):
        import numpy.random as rd
        x=rd.randint(1,n+1)
        y=rd.binomialvariate(x,p)
        return (x,y)
```

❀

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q\left(1 - q^n\right)}{n(1 - q)}$$

1. Ce type de réponse fait souvent appel à une expérience de pensée, il faut se placer dans un univers où l'événement de conditionnement est réalisé et étudier ce que la deuxième étape

RÉPONSE:

Quelque soit le nombre de tirages effectués dans la deuxième urne il est toujours possible de n'obtenir aucune boule blanche. Si on obtient n au premier tirage, on effectue n tirages dans la deuxième urne il donc d'obtenir n boules blanches.

$$\boxed{\text{Les valeurs prises par } Y \text{ sont dans } [\![0, n]\!]}$$

Remarque : Cette question aurait du être posée avant le calcul de la probabilité conditionnelle.
De plus, on se contente de prouver, généralement la valeur minimale et maximale prise par Y. Néanmoins si on veut prouver que toutes les valeurs de $[\![0, n]\!]$ sont prises, il suffit de considérer le cas où on obtient n au premier tirage, alors on effectue n tirages et donc on peut obtenir 0,1,2,... n boules blanches.
Appliquons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{i\in[\![1,n]\!]}$

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P_{X=k}(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P_{X=k}(Y=0) && \text{loi de } X \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{n}{0} p^0 q^{k-0} && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1} nq^k \\
&= \frac{1}{n} q \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} && \text{somme des termes d'une suite géométrique}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{q}{n}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}$$

❀

(b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

RÉPONSE:

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, appliquons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{i\in[\![1,n]\!]}$

$$\begin{aligned}
P(Y=i) &= \sum_{k=1} nP(X=k)P_{X=k}(Y=i) \\
&= \sum_{k=i}^{n} P(X=k)P_{X=k}(Y=i) && \text{d'après les cas impossibles} \\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} P_{X=k}(Y=i) && \text{loi de } X \\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } i \in [\![1, n]\!]\ P(Y=i) = \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i} p^i q^{k-i}}$$

❀

La suite du Dl est facultative

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité :
$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$

RÉPONSE:

Soit i et k tels que $1 \le i \le k \le n$

$$\begin{aligned}
i\binom{k}{i} &= i\frac{k!}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \\
&= k\frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} \\
&= k\frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-1-(i-1)!} \\
& k\binom{k-1}{i-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } i \text{ et } k \text{ deux entiers naturels tels que } 1 \le i \le k \le n,\ i\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}}$$

Remarque : Cette question facile est la pour vous aider dans la question suivante.

❀

(b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}p^i q^{k-i}\right)$$

RÉPONSE:

Y admet une espérance car son support est fini, $[\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{n} iP(Y=i) && \text{définition de l'espérance}\\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i) && \text{le terme en 0 est nul}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\binom{k}{i}p^i q^{k-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i}p^i q^{k-i} && \text{inversion des symboles } \textstyle\sum\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i} && \text{formule précédente}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}}$$

Remarque : Dans cette question, dont l'énoncé donne le résultat, on s'arrête dans les calculs avant d'avoir simplifier. C'est une façon pour le concepteur du sujet de vous donner des indications.

❀

(c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1} q^{k-(j+1)} && \text{changement d'indice } j = i-1\\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j} q^{k-1-j}\\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k(p+q)^{k-1} && \text{formule du binome}\\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k(1)^{k-1}\\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{p}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Remarque : Le changement d'indice, obligatoire, n'est pas forcément évident. C'est pourquoi les calculs de la question précédente s'arrêtaient juste avant cette étape.

$$\boxed{E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}}$$

❀

7. (a) Établir que :

$$\forall n \ge 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\begin{pmatrix} k-2 \\ i-2 \end{pmatrix}p^i q^{k-i}\right)$$

RÉPONSE:

On commence par remarquer que pour $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}
i(i-1)\binom{k}{i} &= (i-1)i\binom{k}{i} \\
&= (i-1)k\binom{k-1}{i-1} && \text{formule démontrée précédemment} \\
&= k(i-1)\binom{k-1}{i-1} \\
&= k(k-1)\binom{k-2}{i-2} && \text{même formule mais avec d'autre coefficients}
\end{aligned}$$

Toutes les sommes sont finies, il n'y a donc pas de problèmes de convergence absolue à soulever.

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(Y=i) && \text{théorème de transfert} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(Y=i) && \text{les deux premiers termes sont nuls} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i} && \text{inversion des } \sum \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} && \text{calcul préliminaires} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}}$$

❀

(b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{\left(n^2-1\right)p^2}{3}$$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-(j+2)} && \text{changement d'indice } j=i-2 \\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{j} p^{j} q^{k-2-j} \\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(p+q)^{k-2} && \text{formule du binome} \\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) && \text{on rajoute un terme nul} \\
&= \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{p^2(n+1)}{2}\left(\frac{2n-2}{2}\right) \\
&= \frac{p^2(n+1)}{2}(n-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}}$$

❀

(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$

RÉPONSE:

Quand $n=1$ la formule précédente est égale à 1. Or on a vu dans les premières questions que dans ce cas là la variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, donc $Y(Y-1)$ est nulle dont a une espérance nulle

❀

(d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$

RÉPONSE:

Remarque : Classique

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ formule de Koening Huyggens, tous les termes existent

$E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y)$ linéarité de l'espérance

$$\boxed{V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2}$$

❀