DM 07

BCPST Spé

Réponses

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

1. Calculer T_2 et T_3.

RÉPONSE:

On a

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 \qquad T_3 = 2XT_2 - T_1$$

$$\boxed{T_2 = 4X^2 - 1 \qquad T_3 = 8X^3 - 4X}$$

❀

2.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

RÉPONSE:

L'étude des premiers termes nous pousse à démontrer par récurrence double la propriété

$$\mathscr{H}_n \ : \ \deg T_n = n \text{ et le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^n$$

. définie pour $n \in \mathbb{N}$

- **Initialisation**
  $\deg(T_0) = 0$ son coefficient dominant est bien $1 = 2^0$.
  $\deg(T_1) = 1$ son coefficient dominant est bien $2 = 2^1$.
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$, et que les coefficients dominants de T_{n+1} et T_n sont respectivement 2^{n+1} et 2^n Alors :
  $$\deg(2XT_{n+1}) = n+2 \quad \text{et} \quad \deg(-T_n) = n$$
  Ces deux degrés étant différents :
  $$\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \max(\deg(-T_n), \deg(2XT_{n+1})) = n+2$$
  De plus tous les monômes constituant le polynôme T_n étant de degré inférieurà n, le coefficient dominant de T_{n+2} est le même que celui de $2XT_{n+1}$ c'est à dire $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$
  $\mathscr{H}_{n+2}$ est donc vraie.
- **Conclusion** D'après le principe de récurrence double.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \ \deg T_n = n \text{ et le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^n}$$

❀

(b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$\mathscr{P}_n \ : T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}$$

- **Initialisation**
  $\mathscr{P}_0$ est vraie d'aprés le calcul de T_0 et T_1
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair.
  Soit $x \in \mathbb{R}$
  $$T_{2n+2}(-x) = -2xT_{2n+1}(-x) - T_{2n}(-x) = 2xT_{2n+1}(x) - T_{2n}(x) = T_{2n+2}(x)$$
  en utilisant l'hypothèse de récurrence. donc : $T_{2(n+1)}$ est pair
  $$\begin{aligned} T_{2(n+1)+1}(-x) &= T_{2n+3}(-x) = -2xT_{2n+2}(-x) - T_{2n+1}(-x) \\ &= -2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = -T_{2(n+1)+1}(x) \qquad \text{en utilisant le point précéde} \end{aligned}$$
  donc : $T_{2(n+1)+1}$ est impair
  $$\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$
- **Conclusion**
  D'aprés le principe de récurrence simple

$\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N},\ T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}}$

❀

On peut aussi démontrer par une récurrence double que pour $n\in\mathbb{N}$ $T_n(-X)=(-1)^n T_n(X)$.

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

RÉPONSE:

Méthode 1
On suppute le résultat et on le démontre à l'aide d'une récurrence double (à rédiger) que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad T_n(1)=n+1}$$

Méthode 2 On constate que d'après la définition de T_n

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad T_{n+2}(1)-2T_{n-1}(1)+T_{n-2}=0$$

$(T_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est

$$t^2-2t+1\qquad (C)$$

qui admet comme racine double 1. Il existe donc α et β deux réels tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad T-n(1)=\left(\alpha n+\beta\right)1^n$$

Comme $T_0(1)=1$ et $T_1(1)=2$

$$\left\{\begin{array}{lcr} T_0(1)=1 & = & \beta \\ T_1(1)=2 & = & \alpha+\beta \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha=1\qquad \beta=1$$

et donc

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N} \text{ on a } T(n)=n+1}$$

❀

4.

(a) Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$: $T_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

RÉPONSE:

Soit $\theta\in]0;\pi[$.
On pose pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{G}_n\qquad :\qquad T_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

- **Initialisation**

$$T_0(\cos\theta)=1 = \frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}$$
$$T_1(\cos\theta)=2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$$

- **Hérédité**
Soit $n\in\mathbb{N}$ on suppose que $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}_{n+1}$ sont vraies *i.e.* :

$$T_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

et

$$T_{n+1}(\cos\theta)=\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}$$

Alors :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta)-T_n(\cos\theta)\\ &= 2\cos\theta\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{2\cos\theta\sin(n+2)\theta-\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{2\cos\theta\sin(n+2)\theta-\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin(n+3)\theta+\sin(n+1)\theta-\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\\ &\text{en utilisant la formule } \cos a\sin b=\frac{1}{2}(sin(a+b)+sin(b-a))\\ &= \frac{\sin(n+3)\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

- **Conclusion**
D'aprés le principe de récurrence double

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ et tout réel } \theta \text{ de }]0;\pi[\ :\ T_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.}$$

Remarque : On peut aussi constater qu'à θ fixé , la suite définie par $u_n = T_n(\cos)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

❀

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1;1[$, que l'on explicitera.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, résolvons dans $]0;\pi[$ l'équation

$$\sin(n+1)\theta = 0$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad (n+1)\theta = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \frac{k}{n+1}\pi\end{aligned}$$

Comme on ne cherche que les solutions dans $]0;\pi[$ il faut et il suffit de choisir $k \in [\![1,n]\!]$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\theta_k = \dfrac{k}{n+1}\pi$, qui sont tous différents. On note aussi $x_k = \cos\theta_k$ ces réels sont tous compris entre -1 et 1 et distincts deux à deux car la fonction : $\begin{array}{ccc}]0;\pi[& \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ est injective (car strictement décroissante).

Alors :

$$T_n(x_k) = T_n(cos\theta_k) = \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\cos\theta} = 0$$

On a donc trouvé n racines distinctes pour un polynôme de degré n, on a donc trouvé toutes les racines :

$$\boxed{\text{Les racines de } T_n \text{ sont les } n \text{ réels } x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]}$$

❀

(c) Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

RÉPONSE:

On connaît les n racines, qui sont donc toutes simples, de T_n et son coefficient dominant on en déduit la factorisation de T_n .

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \ T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

❀

(d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question 3

$$T_n(1) = n+1$$

$$\begin{aligned}n+1 = T_n(1) &= 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ &= 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(\cos 0 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ &= 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(-2\sin\frac{0+\frac{k\pi}{n+1}}{2}\sin\frac{0-\frac{k\pi}{n+1}}{2}\right) \\ &= 2^n 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)^2 \\ &= 2^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)^2\end{aligned}$$

Comme ce produit est un produit de sinus dont chacun des arguments est dans l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$ tous les sinus sont positifs et donc le produit est positif

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}}$$

❀

5.

(a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

$$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\, T_n(\cos\theta) = 0.$$

Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) : $\theta \mapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta$.

RÉPONSE:

par le calcul en utilisant la définition de la suite (T_n)

❀

(b) En déduire, pour tout entier naturel n : $(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$Q_n = (X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n$$

On constate que

$$\forall y \in]-1,1[\quad Q(y) = 0$$

Ce polynôme admet donc une infinité de racine donc :

$$Q = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : (X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0}$$

❀