DM 07

BCPST Spé

à rendre le lundi 25 novembre

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.
   (b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.
4. (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

   $$T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1;1[$, que l'on explicitera.
   (c) Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \prod\limits_{k=1}^{n}\left(X - \cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.
5. **Facultatif**
   (a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

   $$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\,T_n(\cos\theta) = 0.$$

   Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

   $$\theta \mapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta.$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n :

   $$(X^2-1)\,T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)\,T_n = 0$$